

ÚJ MÓDSZER A KAROS MECHANIZMUSOK DINAMIKUS KIEGYENSÚLYOZÁSÁRA

A NEW METHOD FOR DYNAMIC BALANCING OF ARM MECHANISMS

Papp István¹, Tolvaly-Roşca Ferenc²

*Sapientia EMTE, Műszaki és Humán Tudományok Kar, Marosvásárhely, Gépész-
mérnöki Tanszék, Cím: Románia, Marosvásárhely, Şoseaua Sighişoarei
nr.1c; Telefon / Fax: +40-265206210,*

¹pappistvan1944@yahoo.com

²tferi@ms.sapientia.ro

Abstract

The paper presents an optimized balancing method for spatial articulated mechanisms. The presented method offers an optimized solution, minimizing the remaining unbalanced forces and moments. Considering the combined effects of the forces and inertia moments, the offered solution can be applied for one or two balancing axes. The method calculates the phase angles for arbitrary chosen counterweights and the values for the corresponding counterbalancing forces.

Keywords: balancing, optimal, mechanism, dynamic.

Összefoglalás

A dolgozat tér és síkban fekvő karos mechanizmusok optimális kiegyensúlyozásának egyik módszerét mutatja be. A módszer a kiegyensúlyozatlanul maradt tehetetlenségi erők és a tehetetlenségi erők nyomatékainak minimális értékekre való csökkentésére ad megoldást. Nagy előnyt jelent az egy- vagy kéttengelyes kiegyensúlyozásra való alkalmazhatósága, figyelembe veszi a nyomatékok összhatásait, és kiszámítja a tetszőleges helyen választott ellensúlyok fázisszögét és az általuk kifejtett kiegyensúlyozó erők értékét

Kulcsszavak: karos mechanizmusok, dinamikus kiegyensúlyozás, optimális

1. A megoldás elméleti alapjai

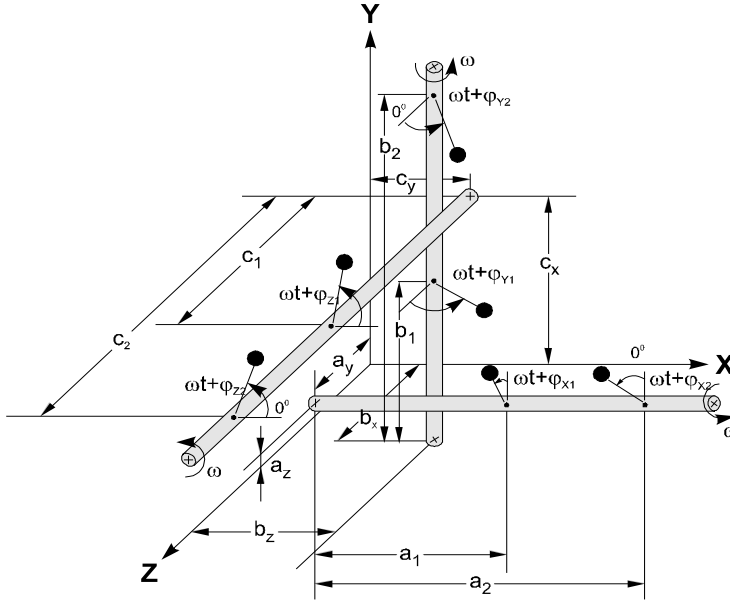
Képzeljünk el egy géptörzshöz rögzített OXYZ koordináta-rendszert, amelynek tengelyei rendre párhuzamosak a gépben forgómozgást végző, kiegyensúlyozásra alkalmas tengelyekkel (**1. ábra**). Az OX koordinátával párhuzamos kiegyensúlyozó tengely az OYZ síkot az $y = a_z$ és $z = a_y$ koordinátpontokban metszi. Erre a ki-

egyensúlyozó tengelyre elhelyezett ellensúlyok OX tengely szerint szabadon választott koordinátái $x = a_1$ és $x = a_2$. Hasonlóképpen az OY koordinátatengellyel párhuzamos kiegyensúlyozó tengely az OXZ síkot az $x = b_z$ és $z = b_x$ pontokban metszi, az ellensúlyok pedig az $y = b_1$ és $y = b_2$ koordináta pontokban lesznek elhelyezve. Az OZ koordinátatengellyel párhuzamos kiegyensúlyozó tengely az OXY síkot $x = c_y$

és $y = c_x$ pontokban metszi, a tengelyhez tartozó ellensúlyok helyzetei a $z = c_1$ és $z = c_2$ koordinátákkal vannak jelölve.

Az **1. ábrán** szereplő kiegyensúlyozó tömegek pillanatnyi szöghelyzetét az $\omega t + \phi$ kifejezéssel adhatjuk meg, ahol a ϕ szög a fázisszög.

A kineti-statikus elvnek (D'Alembert-elvnek) megfelelően [1], a lengést gerjesztő erők és nyomatékok vektorkettőse a kiegyensúlyozó tömegek által gerjesztett erők és nyomatékok vektorkettőisének ellentétje, amely szerint összegük zéró, azaz:



1. ábra. A koordináta-rendszer, amelynek tengelyei rendre párhuzamosak a gépben forgómozgást végző, kiegyensúlyozásra alkalmas tengelyekkel

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0 &= A_{FX} \cos \omega \cdot t + B_{FX} \cdot \sin \omega \cdot t + F_{Z1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_{Z1}) + F_{Z2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_{Z2}) \\
 &\quad + F_{Y1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_{Y1}) + F_{Y2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_{Y2}) \\
 \sum F_y = 0 &= A_{FY} \cos \omega \cdot t + B_{FY} \sin \omega \cdot t + F_{X1} \cos(\omega \cdot t + \phi_{X1}) + F_{X2} \cos(\omega \cdot t + \phi_{X2}) \\
 &\quad + F_{Z1} \sin(\omega \cdot t + \phi_{Z1}) + F_{Z2} \sin(\omega \cdot t + \phi_{Z2}) \\
 \sum F_z = 0 &= A_{FZ} \cos \omega \cdot t + B_{FZ} \sin \omega \cdot t + F_{X1} \sin(\omega \cdot t + \phi_{X1}) + F_{X2} \sin(\omega \cdot t + \phi_{X2}) \\
 &\quad + F_{Y1} \cos(\omega \cdot t + \phi_{Y1}) + F_{Y2} \cos(\omega \cdot t + \phi_{Y2}) \\
 \sum M_x = 0 &= A_{MX} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{MX} \cdot \sin \omega \cdot t + b_1 \cdot F_{Y1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_{Y1}) + \\
 &\quad + b_2 \cdot F_{Y2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_{Y2}) - c_1 \cdot F_{Z1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_{Z1}) - c_2 \cdot F_{Z2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_{Z2}) - \\
 &\quad - a_y \cdot F_{X1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_{X1}) - a_y \cdot F_{X2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_{X2}) + \\
 &\quad + a_z \cdot F_{X1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_{X1}) + a_z \cdot F_{X2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_{X2})
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \sum M_y = 0 = & A_{MY} \cdot \cos\omega \cdot t + B_{MY} \cdot \sin\omega \cdot t + c_1 \cdot F_{Z1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{Z1}) + \\ & + c_2 \cdot F_{Z2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{Z2}) - a_1 \cdot F_{X1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{X1}) - a_2 \cdot F_{X2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{X2}) - \\ & - b_z \cdot F_{Y1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{Y1}) - b_z \cdot F_{Y2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{Y2}) + \\ & + b_x \cdot F_{Y1} \sin(\omega \cdot t + \varphi_{Y1}) + b_x \cdot F_{Y2} \sin(\omega \cdot t + \varphi_{Y2}) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sum M_z = 0 = & A_{MZ} \cdot \cos\omega \cdot t + B_{MZ} \cdot \sin\omega \cdot t + a_1 \cdot F_{X1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{X1}) + \\ & + a_2 \cdot F_{X2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{X2}) - b_1 \cdot F_{Y1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{Y1}) - b_2 \cdot F_{Y2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{Y2}) + \\ & + c_y \cdot F_{Z1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{Z1}) + c_y \cdot F_{Z2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{Z2}) - \\ & - c_x \cdot F_{Z1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{Z1}) - c_x \cdot F_{Z2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{Z2}) \end{aligned}$$

A könnyebb érthetőség végett bevezetjük az következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} Q_1 &= F_{X1} \cdot \cos\varphi_{X1}; & Q_2 &= F_{X2} \cdot \cos\varphi_{X2} \\ R_1 &= F_{X1} \cdot \sin\varphi_{X1}; & R_2 &= F_{X2} \cdot \sin\varphi_{X2} \\ S_1 &= F_{Y1} \cdot \cos\varphi_{Y1}; & S_2 &= F_{Y2} \cdot \cos\varphi_{Y2} \\ T_1 &= F_{Y1} \cdot \sin\varphi_{Y1}; & T_2 &= F_{Y2} \cdot \sin\varphi_{Y2} \\ U_1 &= F_{Z1} \cdot \cos\varphi_{Z1}; & U_2 &= F_{Z2} \cdot \cos\varphi_{Z2} \\ V_1 &= F_{Z1} \cdot \sin\varphi_{Z1}; & V_2 &= F_{Z2} \cdot \sin\varphi_{Z2} \end{aligned} \quad (3)$$

A (3) jelölésekkel, az (1) és (2) egyenletek a következő alakban írhatók:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 = & (A_{FX} + U_1 + U_2 + T_1 + T_2) \cdot \cos\omega \cdot t + (B_{FX} - V_1 - V_2 + S_1 + S_2) \cdot \sin\omega \cdot t \\ \sum F_y = 0 = & (A_{FY} + Q_1 + Q_2 + V_1 + V_2) \cdot \cos\omega \cdot t + (B_{FY} + U_1 + U_2 - R_1 - R_2) \cdot \sin\omega \cdot t \\ \sum F_z = 0 = & (A_{FZ} + S_1 + S_2 + R_1 + R_2) \cdot \cos\omega \cdot t + (B_{FZ} + Q_1 + Q_2 - T_1 - T_2) \cdot \sin\omega \cdot t \\ \sum M_x = 0 = & (A_{MX} + b_1 \cdot S_1 + b_2 \cdot S_2 - c_1 \cdot V_1 - c_2 \cdot V_2 - a_y \cdot Q_1 - a_y \cdot Q_2 + a_z \cdot R_1 + \\ & + a_z \cdot R_2) \cdot \cos\omega t + (B_{MX} - b_1 \cdot T_1 - b_2 \cdot T_2 - c_1 \cdot U_1 - c_2 \cdot U_2 + a_z \cdot Q_1 + a_z \cdot Q_2 + \\ & + a_y \cdot R_1 + a_y \cdot R_2) \cdot \sin\omega \cdot t \\ \sum M_y = 0 = & (A_{MY} - a_1 \cdot R_1 - a_2 \cdot R_2 + c_1 \cdot U_1 + c_2 \cdot U_2 - b_z \cdot S_1 - b_z \cdot S_2 + b_x \cdot T_1 + b_x \cdot T_2) \cdot \cos\omega \cdot t + \\ & + (B_{MY} - c_1 \cdot V_1 - c_2 \cdot V_2 - a_1 \cdot Q_1 - a_2 \cdot Q_2 + b_z \cdot T_1 + b_z \cdot T_2 + b_x \cdot S_1 + b_x \cdot S_2) \cdot \sin\omega \cdot t \\ \sum M_z = 0 = & (A_{MZ} + a_1 \cdot Q_1 + a_2 \cdot Q_2 - b_1 \cdot T_1 - b_2 \cdot T_2 + c_y \cdot V_1 + c_y \cdot V_2 - c_x \cdot U_1 - c_x \cdot U_2) \cdot \cos\omega \cdot t + \\ & + (B_{MZ} - a_1 \cdot R_1 - a_2 \cdot R_2 - b_1 \cdot S_1 - b_2 \cdot S_2 + c_y \cdot U_1 + c_y \cdot U_2 + c_x \cdot V_1 + c_x \cdot V_2) \cdot \sin\omega \cdot t \end{aligned} \quad (4)$$

Ahhoz, hogy a mechanizmus kiegyensúlyozását a teljes kinematikai ciklusra megvalósítsuk, a (4) egyenletnek a t időparaméter bármely értékére teljesülnie kell. Ez a feltétel csak akkor valósulhat meg, ha a rendszer minden egyenlete $\cos\omega t$ -s és

$\sin\omega t$ -s tagjainak együtthatóit egyenlővé tesszük zéróval. Ezzel a feltétellel egy, 12 egyenletből álló és 12 ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszert kapunk, melynek mátrix alakja a következő:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_y & -a_y & a_z & a_z & b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1 & -c_2 \\ a_z & a_z & a_y & a_y & 0 & 0 & -b_1 & -b_2 & -c_1 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 & -a_2 & -b_z & -b_z & b_x & b_x & c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ -a_1 & -a_2 & 0 & 0 & b_x & b_x & b_z & b_x & 0 & 0 & -c_1 & -c_2 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 & -b_2 & -c_x & -c_x & c_y & c_y \\ 0 & 0 & -a_1 & -a_2 & -b_1 & -b_2 & 0 & 0 & c_y & c_y & c_x & c_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ R_1 \\ R_2 \\ S_1 \\ S_2 \\ T_1 \\ T_2 \\ U_1 \\ U_2 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{FX} \\ -B_{FX} \\ -A_{FY} \\ -B_{FY} \\ -A_{FZ} \\ -B_{FZ} \\ -A_{MX} \\ -B_{MX} \\ -A_{MY} \\ -B_{MY} \\ -A_{MZ} \\ -B_{MZ} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Ugyancsak az (3) egyenletekből számítjuk ki a kiegyensúlyozó erők fázisszögeit is, azaz:

$$\begin{aligned} \varphi_{X1} &= \tan^{-1}\left(\frac{R_1}{Q_1}\right) & \varphi_{X2} &= \tan^{-1}\left(\frac{R_2}{Q_2}\right) \\ \varphi_{Y1} &= \tan^{-1}\left(\frac{T_1}{S_1}\right) & \varphi_{Y2} &= \tan^{-1}\left(\frac{T_2}{S_2}\right) \\ \varphi_{Z1} &= \tan^{-1}\left(\frac{V_1}{U_1}\right) & \varphi_{Z2} &= \tan^{-1}\left(\frac{V_2}{U_2}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

A (6) egyenletekben lényeges a számláló és a nevező előjelének megtartása, mivel a fázisszöget előjelesen kell számítanunk. (Pozitív az előjel, ha a szöget az óramutató járásával ellentétesen mérjük.)

A gép törzsén rezgést okozó tehetetlenségi és ezeket részben kiegyensúlyozó erők és nyomatékok kiegyensúlyozatlanul maradt erőinek és nyomatékainak Fourier-együtthatóit a következő mátrixegyenlet fejezi ki:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{Q}_j + \mathbf{F}_i \quad (7)$$

ahol,

\mathbf{R}_i - a Fourier-sorral kifejezett, optimalizálás utáni kiegyensúlyozatlan erők és nyomatékok együtthatóinak oszlop mátrixa;

\mathbf{P}_{ij} - a kiegyensúlyozó erők és tengelyek helyzetét meghatározó mátrix;

\mathbf{Q}_j - az optimális kiegyensúlyozó erők oszlop mátrixa;

\mathbf{F}_i - a Fourier-sorral kifejezett tehetetlenségi erők és a tehetetlenségi erők nyomatékai együtthatóinak oszlop mátrixa.

A (7) egyenletben kéttengelyes kiegyensúlyozás esetén $i=1,2\dots 12$ és $j=1,2\dots 8$, egytengelyes kiegyensúlyozás esetén pedig $i=1,2\dots 10$ és $j=1,2\dots 4$.

A kiegyensúlyozatlanul maradt erők és nyomatékok minimalizálására az együtthatókat meghatározó függvény kvadratikus alakját használjuk, azaz:

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}_i^T \cdot \mathbf{R}_i \quad (8)$$

A (8) függvény optimális értéke meghatározható, ha a függvényt a „j” alkotóból álló kiegyensúlyozó Q_k erők szerint deriváljuk, azaz:

$$\frac{d\mathbf{U}}{d\mathbf{Q}} = \sum_{k=1}^j \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}_k} = \sum_{k=1}^j \left(\frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \mathbf{Q}_k}^T \cdot \mathbf{R}_i + \mathbf{R}_i^T \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \mathbf{Q}_k} \right) \quad (9)$$

Vegyük észre, hogy az \mathbf{R}_i oszlopmátrixra, valamint teljes deriváltjára felírható, hogy:

$$\frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \mathbf{Q}_k} \cdot \mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \mathbf{Q}_k}, \quad (10)$$

amely segítségével a (9) kifejezés a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\mathbf{Q}} &= \sum_{k=1}^j \frac{\partial U}{\partial \mathbf{Q}_k} = 2 \cdot \sum_{k=1}^j \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \mathbf{Q}_k} \cdot \mathbf{R}_i = \\ &= 2 \cdot \sum_{k=1}^j \mathbf{R}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \mathbf{Q}_k} \end{aligned} \quad (11)$$

Ha a (7) mátrixegyenletben a kiegyensúlyozatlanul maradt erők Fourier-együtthatóit a \mathbf{Q}_k általános erő szerint deriváljuk, akkor a következő kifejezésre jutunk:

$$\frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \mathbf{Q}_k} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}_k} (\mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{Q}_j + \mathbf{F}_i). \quad (12)$$

Mivel a \mathbf{P}_{ij} és a \mathbf{F}_i oszlopmátrix nem függ a kiegyensúlyozó erőktől, következik, hogy:

$$\frac{\partial \mathbf{P}_{ij}}{\partial \mathbf{Q}_k} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{Q}_k} = 0. \quad (13)$$

Ezzel az eredménnyel a (12) kifejezés a következőképpen írható:

$$\frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \mathbf{Q}_k} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}_k} \mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{Q}_j = \mathbf{P}_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}_k} \mathbf{Q}_j \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \mathbf{Q}_k} \cdot \mathbf{R}_i &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}_k} (\mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{Q}_j) \cdot \mathbf{R}_i = \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}_k} \mathbf{Q}_j \cdot \mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{R}_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}_k} \mathbf{Q}_j \cdot \mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{R}_i \end{aligned} \quad (15)$$

Ha a (7), (14) és a (15) egyenlőségeket behelyettesítjük a (11) egyenletbe, megfelelő rendezés után a következő alakot kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\mathbf{Q}} &= 2 \cdot \sum_{k=1}^j \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \mathbf{Q}_k} \cdot \mathbf{R}_i = \\ &= 2 \cdot \sum_{k=1}^j \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}_k} \mathbf{Q}_j \cdot \mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{R}_i = 2 \cdot \sum_{k=1}^j \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}_k} \mathbf{Q}_j \cdot \mathbf{P}_{ij} \cdot (\mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{Q}_j + \mathbf{F}_i) \end{aligned} \quad (16)$$

Az U optimáló függvény helyi minimum értékét a következő feltétel határozza meg:

$$\frac{dU}{d\mathbf{Q}} = 0. \quad (17)$$

A fenti feltételhez elégséges hozzácsatolni a (16) egyenletből kifejezett feltételt, ahonnan megkapjuk a (18) egyenletet,

$$\mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{R}_i \cdot (\mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{Q}_j + \mathbf{F}_i) = 0 \quad (18)$$

vagy a (19) összefüggést.

$$\mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{Q}_j + \mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{F}_i = 0. \quad (19)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathbf{N}_{jj} = \mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{P}_{ij} \quad (20)$$

$$\mathbf{K}_j = \mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{F}_i \quad (21)$$

Ezekkel a (19) egyenletet \mathbf{Q}_j -re lineáris alakra hoztuk:

$$\mathbf{N}_{jj} \cdot \mathbf{Q}_j + \mathbf{K}_j = 0. \quad (22)$$

A megoldás \mathbf{Q}_j erők meghatározására a következő,

$$\mathbf{Q}_j = -\mathbf{N}_{jj}^{-1} \cdot \mathbf{K}_j. \quad (23)$$

Feltételezzük, hogy az egytengelyű kiegyensúlyozást a gépben létező OZ tengely-

A kérdés az: hova és mekkora ellensúlyokat kell helyezni a mechanizmus tengelyére ahhoz hogy az egyenlet jobb oldalán lévő kiegyensúlyozatlanul maradt erők és nyomatékok abszolút értékei a minimálisra csökkenjenek? Erre a választ a (23), (25), és a (6) egyenletek megoldásával sikerül megszerezni.

A módszer nagy előnye az, hogy úgy a tér, mint a párhuzamos síkokban fekvő mechanizmusok, háromdimenziós optimális kiegyensúlyozására ad megoldást [3].

2. Alkalmazások

A fenti képletek alkalmazása rendkívüli egyszerű numerikusan. A továbbiakban Mathcad programban a **2. ábrán** látható karos mechanizmusra alkalmazzuk az elméleti képleteket. Az eredményeket hagyományos és Fourier-sorban kifejtett számítások hasonlításával a **4–9. ábrákon** szemléltetjük. FF előtaggal a Fourier sorral kifejtett erőket és nyomatékokat jelöltük.

2.1. Az erők és nyomatékok számítása hagyományos módszerrel

A program fontosabb képletei:

$$i=1 \dots 37;$$

$$L1 = 0.025 \text{ [m]}; \quad L2 = 0.20 \text{ [m]};$$

$$R2=0.10 \text{ [m]}$$

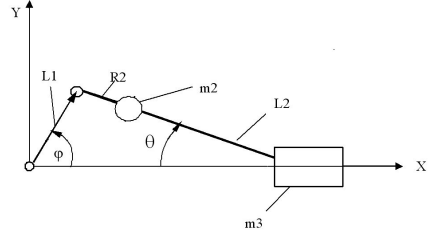
$$\varphi_i = (i-1) \cdot \frac{\pi}{18}$$

$$\theta_i = \text{asin} \left[\frac{-L1 \cdot \sin(\varphi_i)}{L2} \right]$$

$$xG2 = L1 \cdot \cos(\varphi) + R2 \cdot \cos(\theta)$$

$$YG2 = L1 \cdot \sin(\varphi) + R2 \cdot \sin(\theta)$$

$$xG3 = L1 \cdot \cos(\varphi) + L2 \cdot \cos(\theta)$$



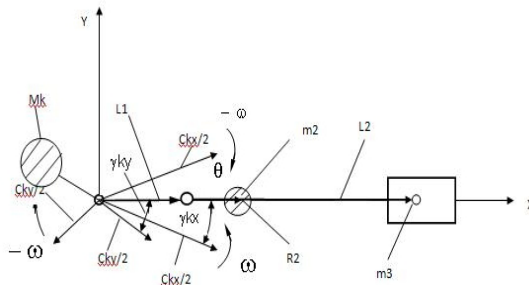
2. ábra. A kinematikai vázlat

$$\dot{\theta}_i = \left(\frac{-L1 \cdot \omega \cdot \cos(\varphi_i)}{L2 \cdot \cos(\theta_i)} \right)$$

$$\dot{x}G2 = -L1 \cdot \omega \cdot \sin(\varphi) - R2 \cdot \omega 2 \cdot \sin(\theta)$$

$$\dot{Y}G2 = L1 \cdot \omega \cdot \cos(\varphi) - R2 \cdot \omega 2 \cdot \cos(\theta)$$

$$\dot{x}G3 = -L1 \cdot \omega \cdot \sin(\varphi) - L2 \cdot \omega 2 \cdot \sin(\theta)$$



3. ábra. A fázisszögek

$$\ddot{\theta}_i = \frac{L1 \cdot \omega \cdot [\omega \cdot \sin(\varphi_i) \cdot \cos(\theta_i) - \omega 2_i \cdot \cos(\varphi_i) \cdot \sin(\theta_i)]}{(\cos(\theta_i))^2 \cdot L2}$$

$$\ddot{X}G2 = -L1 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\varphi) - R2 \cdot \omega 2_1^2 \cdot \cos(\theta_1) - R2 \cdot \varepsilon 2_1 \cdot \sin(\theta_1)$$

$$\ddot{Y}G2 = -L1 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\varphi) - R2 \cdot \omega 2_1^2 \cdot \sin(\theta_1) - R2 \cdot \varepsilon 2_1 \cdot \cos(\theta_1)$$

$$\ddot{X}G3 = -L1 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\varphi) - L2 \cdot \omega 2_1^2 \cdot \cos(\theta_1) - L2 \cdot \varepsilon 2_1 \cdot \sin(\theta_1)$$

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = -M2 \cdot \begin{pmatrix} \ddot{X}G2 \\ \ddot{Y}G2 \end{pmatrix} - M3 \cdot \begin{pmatrix} \ddot{X}G3 \\ \ddot{Y}G3 \end{pmatrix}$$

$$M12 = -Jz2 \cdot \varepsilon 2$$

$$Mt2 = -M2 \cdot (XG2 \cdot \ddot{Y}G2 - \ddot{X}G2 \cdot YG2)$$

$$MZ2 = Mt2 + M12$$

2.2. Az erők és nyomatékok számítása Fourier sorban való kifejtéssel

$$FFXT_i = C1O + AFx \cdot \cos(\varphi_i) + Bfx \cdot \sin(\varphi_i)$$

$$fFx = CFx \cdot \cos(\varphi_i + \gamma kx)$$

$$FFYT_i = C2O + AFy \cdot \cos(\varphi_i) + BFy \cdot \sin(\varphi_i)$$

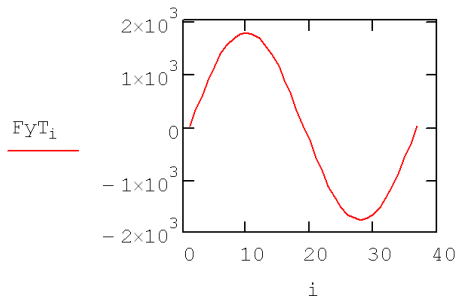
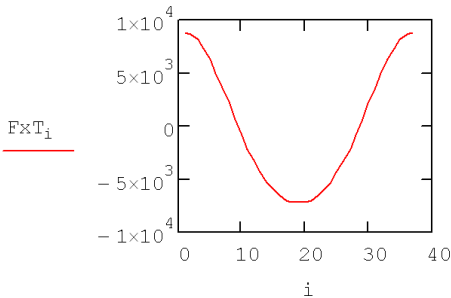
$$fFy = CFy \cdot \sin(\varphi_i + \gamma ky)$$

$$FMz_i = C3O + AMz \cdot \cos(\varphi_i) + BMz \cdot \sin(\varphi_i)$$

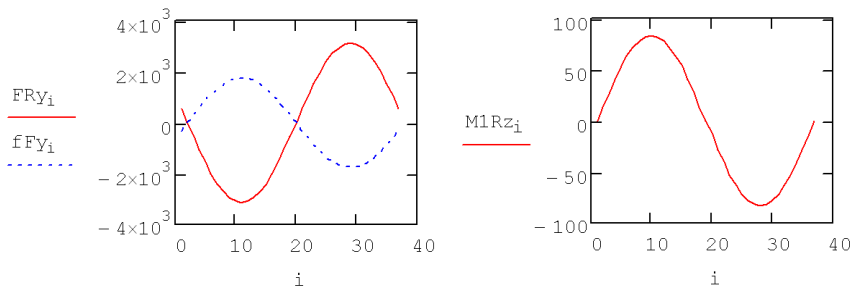
$$\tan \gamma kx = -\frac{Bkx}{Akx}$$

és

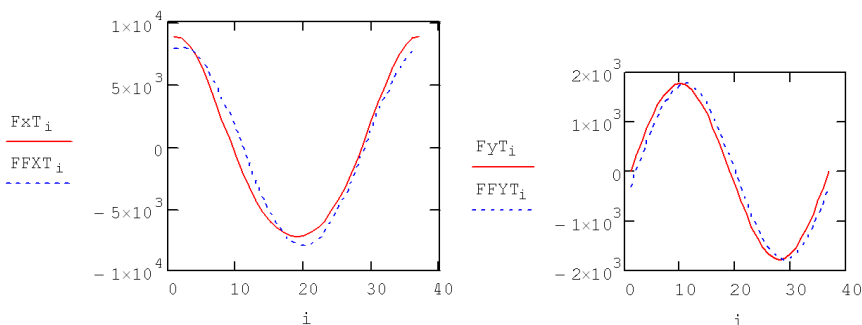
$$\tan \gamma ky = -\frac{Bky}{Aky}$$



4.ábra. Tehetetlenségi erők kiegyensúlyozás előtt.



5. ábra. A kiegyensúlyozás előtti és utáni FR_y és fFY_i erők diagramjai; a rendszer OZ tengelyhez viszonyított nyomatéka (Mz_2)



6. ábra. A kiegyensúlyozás előtti tehetetlenségi erők hasonlítása: Fourier-kifejtés előtt és után

Tehát létezik egy CF_x és CF_y modulusú vektor, amely szinkronban forog -10 fokos kezdeti fázisszöggel eltolva. A CF_x modulusú vektor OX tengelyirányú alkotója képezi az fFx tehetetlenségi erőt, a CF_y pedig az OY tengelyirányú fFy tehetetlenségi erőt.

A két modulus nem egyforma, s habár szinkronban szaladnak, őket külön kell kezelni. Az fFx fFy alkotók értékeit két külön-külön egymással szembeforgó fél modulusú erővel lehet helyettesíteni. Ezek közül csak a tengellyel együtt forgó alkotót vesszük figyelembe, amelynek modulusa CF , azaz:

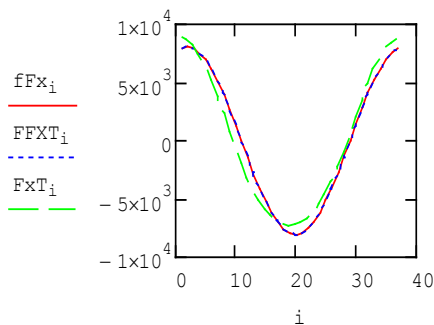
$$CF = \frac{(CF_x + CF_y)}{2}$$

A (23) és a (25) egyenletek szerint írt program a következő értékeket használja:

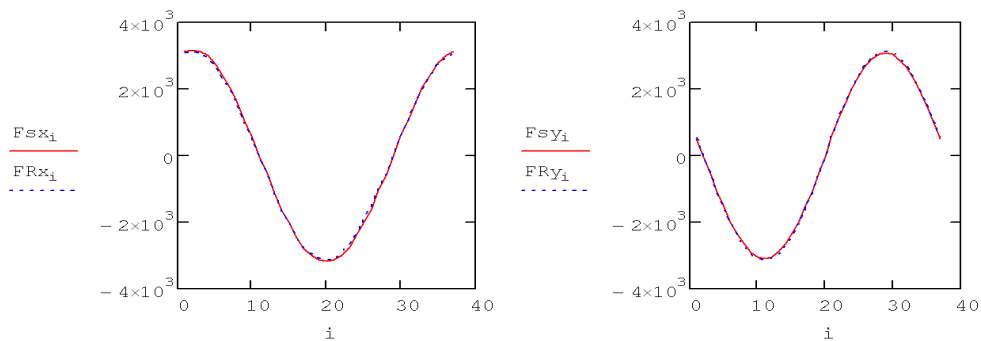
$$A_{M_x}=0; \quad B_{M_x}=0; \quad A_{M_y}=0; \quad B_{M_y}=0;$$

$$c_1 = -0.020; \\ c_2 = 0.020;$$

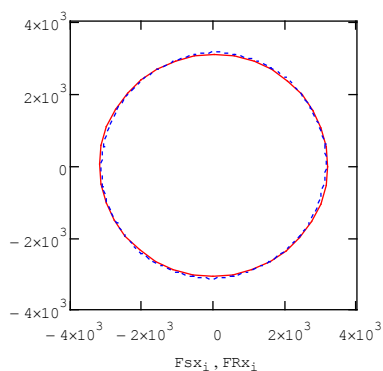
$$c_x = -0.070; \\ c_y = -0.120;$$



7. ábra. A kiegyensúlyozatlanul maradt F_x erők változásai



8. ábra. Az F_x és F_y erők összehasonlítása



9. ábra. A kiegyensúlyozatlanul maradt F_y erők modulusainak görbéje

A 7., 8. és 9. ábrák mindkét módszer szerinti kiegyensúlyozás után a kiegyensúlyozatlanul maradt erőket szemléltetik.

Szakirodalmi hivatkozások

[1] Maros, D.: *Mecanisme*. Atelierul de multiplicare al I.P. Cluj, 1980.

[2] Stevens, E.N.: *Balancing of Machines*. San Francisco, California, ASME, paper 72-Mech.-52, 1972.

[3] Papp, I.: *Contribution on Dynamic Balancing of Spatial Mechanisms*. Phd. Thesis, Cluj Napoca, 1999.