



KOSZINUSZPROFILÚ LEFEJTŐLÉCCEL GYÁRTOTT FOGASKERÉKPÁR SZINTÉZISE ÉS CAD-VIZSGÁLATA

SYNTHESIS AND CAD-EXAMINATION OF A CYLINDRICAL GEAR PAIR DERIVED FROM A COSINE PROFILED RACK

Máté Márton,¹ Gál Károly-István,² Tolvaly-Roşca Ferenc³

*Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Marosvásárhelyi Kar, Gépészmérnöki Tanszék,
Marosvásárhely, Románia*

¹ mmate@ms.sapientia.ro, ² gal.karoly@ms.sapientia.ro, ³ tferi@ms.sapientia.ro

Abstract

The problematic of gear profiles has again come to the fore during the power demands imposed by technical development. Nowadays gears have an almost involute profile because of their numerous advantages, the most important being that changing the center distance does not affect the transmission ratio. According to [1], a cosine gear drive has a lower slip coefficient and the contact and bending stresses by charge are significantly lower compared to an involute gear. In this paper, we present a study regarding the generation of a cosine profile rack in a CAD environment. The profile of the generating rack and the mathematical computations of the equations of gearing were performed in a Mathcad environment. The tool models were created in Autodesk Inventor. Then it was implemented in Autodesk AutoCAD and using its special programming language (Auto lisp), a simultaneous subtraction-rolling method was used to obtain a realistic simulation of the meshing of the cut gear with the rack. Implementing the generated gears in Autodesk Inventor environment, tests were performed in order to compare the cosine profile of the generated gears with the profile of the involute gears. In the near future, we intend to exploit the results obtained and compare the transmission quality of the involute gears with the cosine gears.

Keywords: *cosine profile, involute, CAD, Mathcad, Autolisp, cosine profiled rack, gear.*

Összefoglalás

A fogaskerékprofilok problémaköre a technikai fejlődés követelte teljesítménynöveléssel került újra előtérbe. Napjainkban a fogaskerekek nagy része evolvens profilal rendelkezik, mivel ezen fogazatok számos pozitív tulajdonsággal bírnak, melyek közül az egyik legfontosabb az, hogy a tengelytáv változtatása nem módosítja az áttételi arányt. Az [1] alapján a koszinuszos fogaskerékajtás kisebb csúszási együtthatóval rendelkezik, valamint a terhelés során ébredő érintkezési és hajlítási feszültségei csökkennek az evolvens fogaskerékhez képest. Dolgozatunkban egy koszinuszprofilú lefejtőlécet és az ezzel képzett fogaskerékpár generálását, valamint ennek CAD-környezetben való tanulmányozását végeztük el. A lefejtőléc profilját, valamint a kapcsolódási egyenleteket Mathcad-környezetben számítottuk ki. A szerszámmodelleket Autodesk Inventor-környezetben hoztuk létre. Az így kialakított modelleket AutoCAD-környezetbe illesztve, Autolisp nyelven megírva, egy egyidejű kivonásos-gördülési programot alkalmaztunk a fogaskerekek léccel történt lefejtésének valósághű szimulációjára. Az így generált fogaskerekeket Autodesk Inventor-környezetbe visszaüllesztve, vizsgálatokat végeztünk annak érdekében, hogy a generált fogaskerekek koszinuszprofilját azonos méretű evolvens fogaskerekek profiljával összehasonlítsuk. A közeljövőben szándékunkban áll az így kapott eredményeket hasznosítani, és összehasonlítani az evolvens fogazatú fogaskerekek átviteli képességét a koszinuszfogazatú kerekkel szemben.

Kulcsszavak: *koszinuszprofil, evolvens, CAD, Mathcad, Autolisp, lefejtőléc, fogaskerék.*

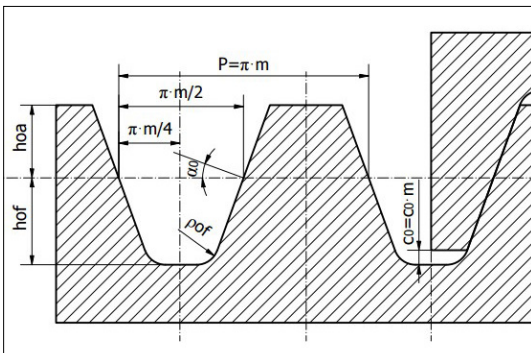
1. Bevezetés

A fogaskerek a fogak profilja szerint lehetnek evolvens, pálcs, ciklois vagy köríves kialakításúak. A leggyakrabban alkalmazott fogaskerékpofil az evolvens, amelynek számos előnye közé tartozik az áttételi arány tengelytávától való függetlensége és az egyszerű gyártás. Emellett hátrányai is vannak, mint például a korlátozott terhelhetőség és az interferenciára való hajlam. A numerikusan vezérelt gépek megjelenésének köszönhetően különböző speciális profilok is kialakíthatók.

A ciklois gyakorlati alkalmazottsága mára már visszaszorult, csupán az óraiparban és speciális szivattyúknál alkalmazzák. A ciklois profilnak számos előnye van: a profilok közti relatív csúszás nulla, a kopás kismértékű, nem igényel feltétlenül kenést, és a kapcsolószám nagyobb, mint az evolvens, pálcs vagy körívfogazatok esetében.

A pálcs fogazat a legrégebbi fogazattípus. Ez a fogazat újra virágkorát éli, óraművekben, bolygó-művekben, valamint emelőszerkezetekben alkalmazzák. A pálcs fogazatú hajtásokat fogak helyett kör keresztmetszetű pálcsakkal kialakított kerék és egy ezzel kapcsolódó ciklois profilú fogaskerék alkotja.

Lehetőség van arra, hogy a hengeres fogaskereket körívprofilal is tervezzük. Felhasználási területei: cementmalmok, kompresszorok, emelőgépek stb. Az USA iparában széles körben alkalmaznak körívprofilokat, amelyek a műanyag fogaskerek gyártásának legmegfelelőbb alappilérét jelentik. Erőátvitel szempontjából ezek nagyon előnyösek, nagy szilárdság jellemzi őket, valamint megfelelő kenés mellett kifejezetten jól működnek, az áttétel határfoka pedig felülmúlja a nem köszörült, evolvens profilú hajtásokat [2].



1. ábra. Szabványos alappprofil

2. Koszinuszléccel gyártott fogaskerékpár

2.1. Általános gyártóléc felépítése

Az általánosíthatóság érdekében az alapprofil (1. ábra) egységnyi m (modulra) határozzuk meg. A szabványos alapprofilszög értéke $\alpha = 20^\circ$. A fogtő szilárdságának növelése érdekében az előírt foglábgyömbületi sugár értéke legyen $\rho_{of} = 0,38 \cdot m$ [2].

2.2. Koszinusz-gyártóléckialakítás

A koszinuszprofilú lécc profilegyenletét az $O_S X_S Y_S$ koordináta-rendszerhez képest írtuk fel.

A kék és a zöld színű (2. ábra) koszinuszprofilú lécek a hajtás 1-es, illetve 2-es kerekét fejtik le. A közös profiljuk az ABCEFG piros színű jelölt koszinuszgörbe.

A profil egyenletét a következő alakban keressük:

$$y_{S1}(x) = a \cos(bx),$$

ahol

$$a = a_s = b_s = (h_o^* + c_o^*)m$$

$$h_o^* = 1, c_o^* = 0,25$$

Koszinuszgörbe alkalmazásakor figyelembe kell venni a lécc osztását ($p = \pi m$), amelyet a függvény periódusához kell igazítani. Felírható, hogy:

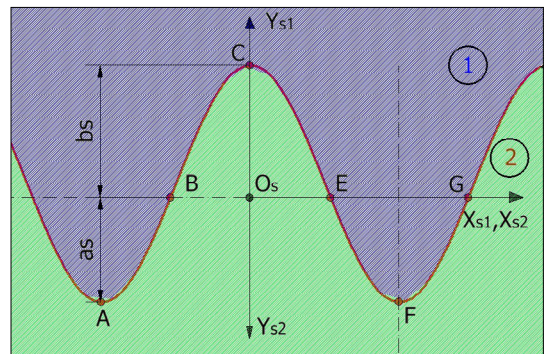
$$y_{S1}(x) = y_{S1}(x + p) \\ \Rightarrow a \cos(bx) = a \cos b(x + p)$$

A fenti egyenletet átrendezve és szorzattá alakítva, ez a következő alakot ölti:

$$\sin\left(bx + \frac{bp}{2}\right) \sin\left(\frac{bp}{2}\right) = 0$$

Ahhoz, hogy az egyenlőség mindig fennálljon, az alábbi feltételnek teljesülnie kell:

$$\sin\left(\frac{bp}{2}\right) = 0$$



2. ábra. Lécek közös profilja

A (4) kanonikus trigonometriai egyenlet megoldása:

$$\frac{pb}{2} = (-1)^k \arcsin(0) + k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

ahonnan

$$b = \frac{2k\pi}{p} = \frac{2k\pi}{\pi m} = \frac{2k}{m} \quad (6)$$

Tehát a leghamarabbi ismétlődésre $k=1$, ezzel:

$$b = \frac{2}{m} \quad (7)$$

A koszinuszprofilú lécc kapcsolószöge ugyan változó, viszont az evolvenst generáló szabványos, $\alpha_0 = 20^\circ$ -os profilszögű léccel való összehasonlítás kedvéért ezt az osztóvonalon definiáljuk. Az 1. ábra alapján a kapcsolószög a profilnak osztóvonalai pontjában húzott érintő és az x tengely pozitív iránya által bezárt szög pótszöge. A derivált függvény geometriai értelmezésével

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ctg} \alpha_c = \frac{dy}{dx} \Big|_{(x=-\frac{\pi m}{4})} = -ba \sin bx \quad (8)$$

$$\alpha_c = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(-2.5) \approx 21^\circ 48'' \text{ juk, hogy}$$

Az 1-es kereket generáló lécc fogárkának szimmetriatengelye az y_{s1} tengely, amint az a 2. ábrán is látható. Így az 1-es lécc profilegyenlete a következő:

$$y_{s1}(x_{s1}) = a \cos\left(\frac{2}{m} x_{s1}\right) \quad (9)$$

A 2-es kerék generálóléce az y_{s2} tengelyhez képest fogra szimmetrikus. Feltételezzük, hogy sablon-ellensablon elv érvényesül a két lécc esetében, vagyis az s_2 -t az s_1 -ből származtatjuk úgy, hogy az x tengely körül elforgatjuk 180° -kal a profilt. Így a 2-es lécc profilegyenlete a következő lesz:

$$y_{s2}(x_{s2}) = -a \cos\left(\frac{2}{m} x_{s2}\right) \quad (10)$$

$$\text{Ha } x_{s2} = x_{s2}^* + \frac{\pi m}{2}, \text{ akkor}$$

$$y_{s2}^*(x_{s2}^*) = a \cos\left(\frac{2}{m} x_{s2}^*\right), \text{ tehát az eredeti profilt}$$

kaptuk vissza, így bizonyítottuk, hogy a sablon-ellensablon elve érvényesül.

2.3. Koszinusz-fogaskerékpár generálása

A generálás szemléltetésének céljából a 3. ábrán illusztráltuk a kezdeti kiinduló, illetve egy, a kezdeti pozíciótól már eltérő helyzetű fogaskerékpárt, valamint feltüntettük az ezekhez tartozó koordinátarendszereket.

Felírjuk a koordinátarendszerek közti transzformációs mátrixokat.

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{M}_{10} \mathbf{M}_{0s1} \mathbf{r}_{s1}$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{M}_{20} \mathbf{M}_{0s2} \mathbf{r}_{s2}$$

$$\mathbf{M}_{1s1} = \mathbf{M}_{10} \mathbf{M}_{0s1}$$

$$\mathbf{M}_{2s2} = \mathbf{M}_{20} \mathbf{M}_{0s2}$$

Jelen dolgozatban a mátrixos formákat nem közöljük, viszont, ha ezeket felírjuk, észrevehető lesz, hogy a két transzformációs mátrix azonos szerkezetű.

2.4. A kapcsolódási egyenletek

A kapcsolódási egyenletet két különálló, de egybevágy lefejtőléccel kapcsolódó 1-es és 2-es kerékre írjuk fel. A relatív sebességek a 4. ábrán feltüntetett helyvektorokból és szögsebességekből következnek.

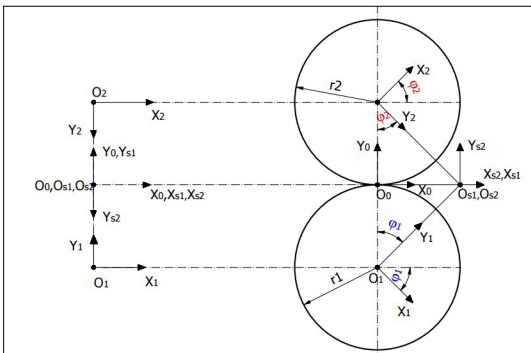
A relatív sebességek kifejezései a következőképpen alakulnak:

$$\mathbf{v}_{s1}^{(1,s1)} = \mathbf{v}_{s1}^{(1)} - \mathbf{v}_{s1}^{(s1)} =$$

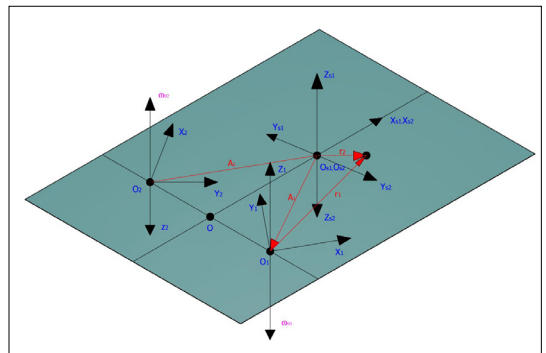
$$\boldsymbol{\omega}_{01}^{(1)} \times \mathbf{r}_{s1} + \mathbf{A}_1 \times \boldsymbol{\omega}_{01}^{(1)} - \omega_1 \mathbf{r}_1 \mathbf{i}_{s1} \quad (12)$$

$$\mathbf{v}_{s2}^{(2,s2)} = \mathbf{v}_{s2}^{(2)} - \mathbf{v}_{s2}^{(s2)} =$$

$$\boldsymbol{\omega}_{02}^{(2)} \times \mathbf{r}_{s2} + \mathbf{A}_2 \times \boldsymbol{\omega}_{02}^{(2)} - \omega_2 \mathbf{r}_2 \mathbf{i}_{s2}$$



3. ábra. Fogaskerékpár generálása



4. ábra. Kapcsolódás két, különálló léccel

2.5. Egyetlen szerszámmal történő fogazat-kialakítás

Mivel a 2.2-es pontban bizonyítást nyert a sablon-ellensablon elve, ezért egy fogaskerékpárt $\xi=0$ profileltolás-érték mellett gyárthatunk ugyanazon szerszámmal. Így a lefejtőléc egyenlete azonos a 2.2-ben felírt egyenlettel.

A burkoláshoz felhasznált transzformációs egyenletek mátrixos alakjai a következők:

$$\mathbf{M}_{1s} = \mathbf{M}_{10} \mathbf{M}_{0s} \quad (13)$$

$$\mathbf{M}_{1s} = \mathbf{M}_{10} \mathbf{M}_{0s}$$

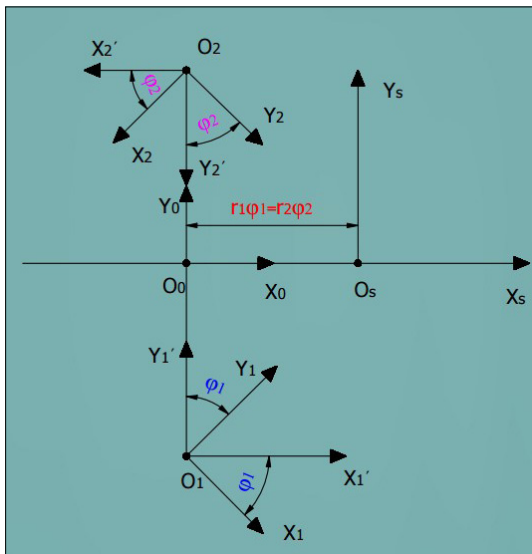
A szögsebességek és ezek ekvipolens eltolását meghatározó helyvektorok a következők:

$$\begin{aligned} \omega_{01s}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \mathbf{A}_{1s} = \begin{bmatrix} -r_1 \varphi_1 \\ -r_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \omega_{02s}^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i_{21} \end{bmatrix}; \mathbf{A}_{2s} = \begin{bmatrix} -r_2 \varphi_2 \\ r_2 \\ 0 \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (14)$$

A (14) oszlopvektorokat behelyettesítjük a (12) sebességekfejezésekbe, és megkapjuk a sebességvektorok oszlopait:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s^{(s1)} &= \begin{bmatrix} -y_s \\ x_s - r_1 \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_s^{(s2)} &= \begin{bmatrix} y_s \\ x_s + r_2 \varphi_2 i_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

Mindkét profil egyszerre kapcsol, tehát ha a kapcsolódási pont M, akkor $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$, ugyanabban az időben, mindkét léckerékkapcsolás számára.



5. ábra. Ugyanazon léccel való gyártás

Tehát:

$$\mathbf{v}_s^{(s1)} \cdot \mathbf{n}^{(1)} = 0 \quad (16)$$

$$\mathbf{v}_s^{(s2)} \cdot \mathbf{n}^{(2)} = 0$$

A koszinuszprofil normálvektorának felírása az u paraméter segítségével a következő (5. ábra):

$$\mathbf{n}(u) = \begin{bmatrix} \frac{2a}{m} \sin\left(\frac{2}{m}u\right) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Az első kapcsolódási egyenlet, a (15) és (17) képletek behelyettesítésével a (16)-ba, a következő lesz:

$$-y_s \frac{2a}{m} \sin\left(\frac{2}{m}u\right) + (x_s - r_1 \varphi_1) \cdot 1 = 0 \quad (18)$$

Innen

$$\varphi_1(u) = \frac{2}{mz_1} \left(x_s - y_s \frac{2a}{m} \sin\left(\frac{2}{m}u\right) \right) \quad (19)$$

Hasonlóképpen, a második kapcsolódási egyenlet:

$$y_s \frac{2a}{m} \sin\left(\frac{2}{m}u\right) - (x_s - r_2 \varphi_2) \cdot 1 = 0, \quad (20)$$

melynek megoldása

$$y_s \frac{2a}{m} \sin\left(\frac{2}{m}u\right) - (x_s - r_2 \varphi_2) \cdot 1 = 0, \quad (21)$$

A fenti egyenleteket Mathcad-környezetbe illesztve, létrehoztuk a bal (piros), illetve jobb (kék) fogárokprofilokat (6. ábra).

A bal és a jobb fogoldal kapcsolódási vonalai, ra_i és tr_i között, azaz az fr_i lábkörsugárnál c_0^* -m-mel nagyobb úgynevezett belső kör sugáron (7. ábra).

3. Működésszimuláció

Annak érdekében, hogy szimulációt végezzünk, szükséges a lefejtőléc modelljének elkészítése.

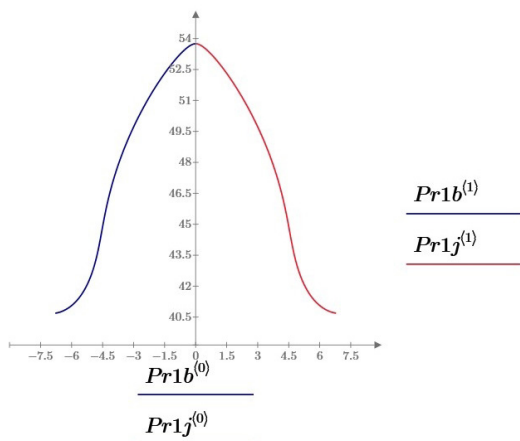
A kiinduló adatok:

$$\begin{aligned} m &= 5 \text{ mm}; h_0 = 1; c_0 = 0,25; z_1 = 19; z_2 = 27; b = 2/5 \\ a &= (h_0 + c_0)m = 6,25 \text{ [mm]} \end{aligned} \quad (22)$$

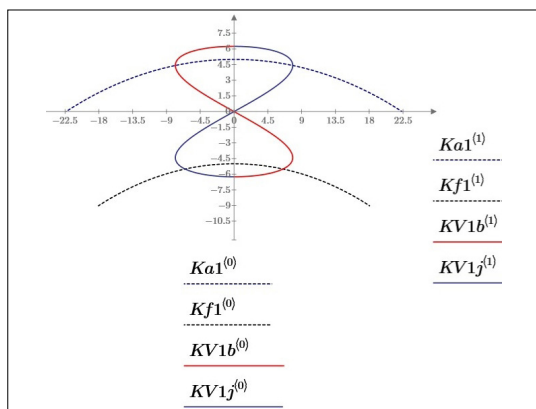
A meglévő egyenleteket és a kiinduló adatokat Mathcad-környezetbe implementálva létrehoztuk a koszinuszprofil (8. ábra).

A kapott profilpontokat Autodesk Inventor-környezetbe implementálva létrehoztuk a lefejtő léccel 3D-testmodelljét (9. ábra).

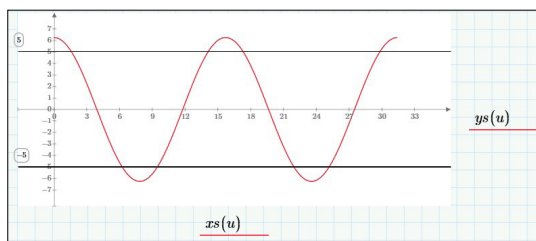
A gyártási szimulációt Autodesk AutoCad-környezetben végeztük, mivel az Autodesk Inventor nem tud 3D-Solid objektumokkal megfelelő kivonást elvégezni. Az AutoCad specifikus programozási felületét használva egy Autolisp [3] programot írtunk, amely egy egyidejű legördülést és kivonást valósít meg.



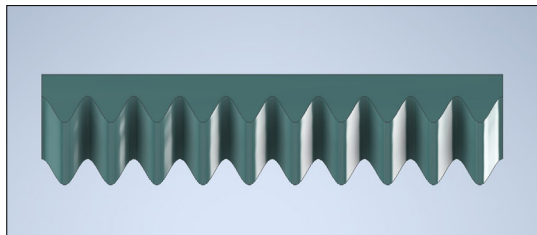
6. ábra. Fogárokprofilok



7. ábra. A bal és a jobb fogoldal kapcsolódási vonalai



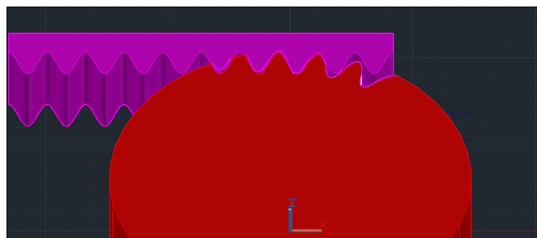
8. ábra. Lefejtőléc koszinuszprofilja



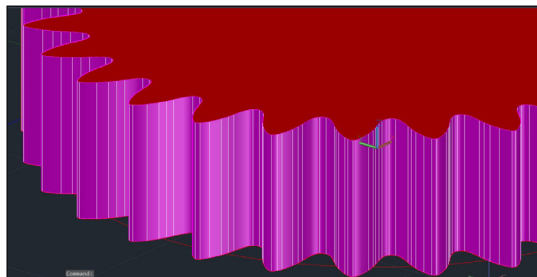
9. ábra. Léc 3D-Solid modell

4. Összehasonlító vizsgálatok és ellenőrzések

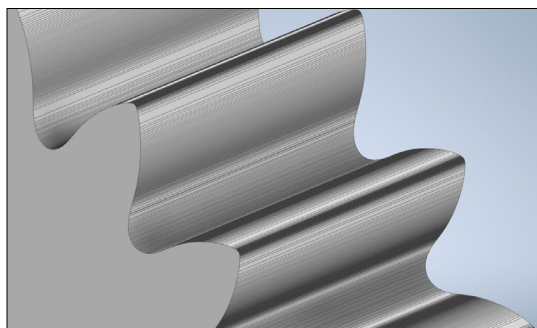
A lefejtőléc segítségével generált fogaskerékpáron végeztünk vizsgálatokat. A vizsgálatokhoz szükséges volt elkészítenünk két, azonos kiinduló adatokkal rendelkező evolvens profilú fogaskereket. Annak érdekében, hogy megfelelő méréseket végezzünk, mind a négy esetben a profileltolás értéke $\xi=0$ -ra volt állítva. Annak érdekében, hogy a koszinuszlécprofil minél pontosabban közelítsük, az Autodesk Inventor által megengedett maximális 500 pontot vettük fel, majd ezeket Spline-görbékkel kötöttük össze. A kapott profilból létrehozott léccel az Autolisp-környezet segítségével generáltuk a $z_1=19$, illetve $z_2=27$ fogú koszinusz-fogaskerekeket. A kivonásos-gördülési módszer alkalmazásakor a megadott pontosság értéke csupán 0,2mm volt, mivel ez a módszer



10. ábra. Legördülő-kivonó művelet



11. ábra. AutoCad-ben generált fogaskerék



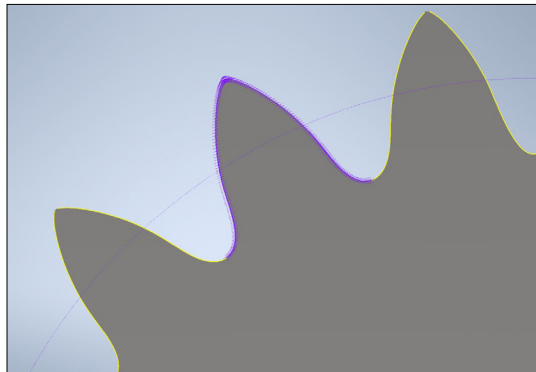
12. ábra. AutoCAD-ben generált fogfelület-szemléltetés

igen nagy hardverigényű (a lépésenkénti kivonás és felületképzés komplex művelet). A 12. ábrán megfigyelhetők a gyártóléc által generált egyenesek a fog felületén.

4.1. Matematikai modell grafikus ellenőrzése

Első lépésben megvizsgáltuk, hogy a matematikai modell milyen mértékben egyezik a generált fogaskerek profiljával.

A 13. ábra esetében a Mathcad-környezetben generált profilt tökéletesen illesztettük a gyártott fogaskerék profilvetületéhez. Amint az az ábrán is látható, a Mathcad-környezetben generált profil tökéletesen illeszkedik a generált profilra, tehát a matematikai modell helyes.

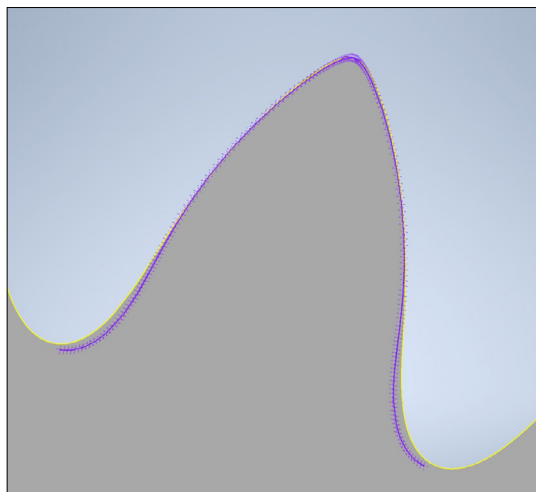


13. ábra. Matematikai modell helyességének vizsgálata

4.2. Fogsám hatása a koszinuszprofil alakjára

Az evolvens profilok esetében megfigyelhető, hogy a fogaskerék fogsámának növelése vagy csökkentése hatással van a profil alakjára, az alapkör sugár változása miatt. Ez a koszinuszfogazat esetében is igaz, amint az a 14. ábrán is látható.

A 13. ábrán a $z=19$ (lila), illetve $z=27$ (sárga) fogú fogaskerek profiljai láthatóak. Ha az osztókörtől a fejkör irányába haladunk, azt tapasztaljuk, hogy a kisebb fogsámú kerék fogát közrezáró profilok hamarabb összetartanak, ebből eredően nagyobb a fogkihegyesedés veszélye. Ugyanakkor, ha az osztókörtől a lábkör irányába haladunk, akkor a profilok ismét záró tendenciát mutatnak (lila görbék), tehát a fogláb görbe íve meredekebb, ami maga után vonja a fogtő gyengülését.



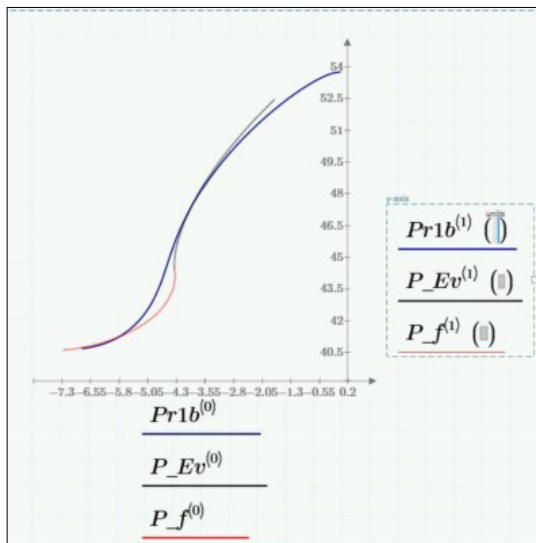
14. ábra. Fogsámhatás

4.3. Evolvens és koszinuszprofilok összehasonlítása

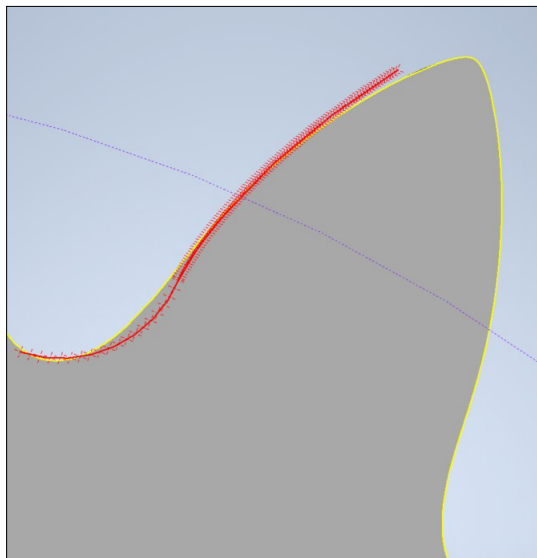
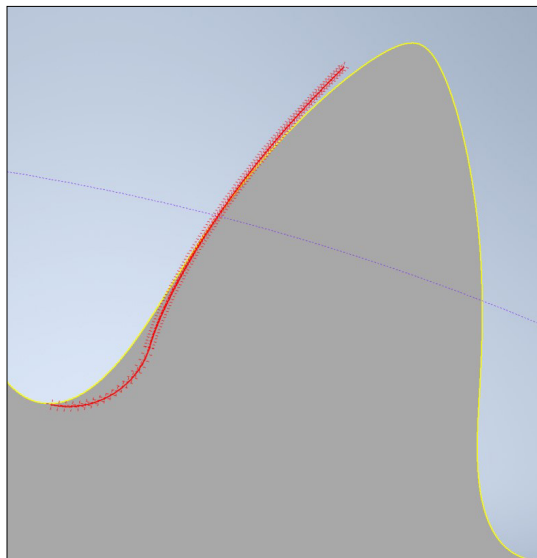
Ahhoz, hogy összehasonlítást végezzünk, szükségünk volt két evolvens fogazatú kerékre. A fogaskerek profilját Mathcad-környezetben generáltuk. A profilok két részből épültek fel: egy fogláb görbéből, valamint egy evolvens szakaszból. Ezen profilok lekerekítetlen fejélszalagú lefejtőléccel voltak generálva. Mathcad-környezetben egymásra helyeztük a két profilt, az osztókört használva referenciának. A Mathcad-számításokra nem fogunk kitérni.

Grafikus vizsgálatokat is végeztünk a profilok összehasonlításához (16. ábra és 17. ábra).

Mindkét esetben az evolvens profilhoz tartozó fogláb görbe gyengébb fogtövet eredményez, amely csökkenti a fogaskerek élettartását. Ha az osztókör és a fejkör közti szakaszt vizsgál-



15. ábra. Koszinusz-, evolvens profilok

16. ábra. $Z=19$ eset17. ábra. $Z=27$ eset

juk, mindkét esetben a koszinuszprofil összezárt az evolvenshez képest, amely fogkihegyesedés eredményezhet.

5. Következtetések

A koszinuszfogazat szintézisekor a lécek egybevágók, és ugyanakkor sablon-ellensablonként érintkeznek, ami az egyetlen szerszámmal való kialakítást lehetővé teszi.

A fogszám erőteljesen befolyásolja a fogaskerék profiljának alakját.

Ugyanazon modulú, de két különböző fogszámú kerék gyártása esetén a nagyobb fogszám előnyösebb, mivel ebben az esetben a koszinuszgörbe erősebb fogtövet eredményez.

A koszinusz-fogaskerekek, foglábgörbék alakját tekintve, előnyösebbek, mint az evolvens fogazat, mivel az evolvens esetében gyengébb fogtő fog kialakulni, amely hangsúlyosan befolyásolja az élettartamot.

A koszinuszfogazat esetében, kis fogszámoknál a fejkör felé haladva, erőteljesen csökken a profilok közötti távolság, így fennáll a kihegyesedés veszélye.

Szakirodalmi hivatkozások

- [1] Shanming Luo, Yue Wu, Jian Wang: *The Generation Principle and Mathematical Models of a Novel Cosine Gear Drive*. Mechanism and Machine Theory, 43 (2008) 1543–1556.
- [2] Pálfi K., Prezenszky T., Csibi V., Antal B., Gyenge Cs., Balogh F.: *Fogazott alkatrészek tervezése, szerszámai és gyártása*. Gloria Kiadó, Kolozsvár, 1999.
- [3] Tolvaly-Roşca F.: *A számítógépes tervezés alapjai: AutoLisp és Autodesk Inventor alapismeretek*. Erdélyi Múzeum-Egyesület, Kolozsvár, 2009. <https://doi.org/10.36242/mtf-07>
- [4] Máté M.: *Hengeres fogaskerekek gyártószerszámai*. Erdélyi Múzeum-Egyesület, Kolozsvár, 2016. <https://doi.org/10.36242/mtf-12>
- [5] Hollanda D.: *Aşchiere şi scule*. Reprografia. I.I.S.Tg.Mureş, 1994. 234–240.
- [6] Szeniczai L.: *Az általános fogazás*. Nehézipari Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1958. 49–50.
- [7] Máté M.: *Az egyenesfogú metszőkerék szer számkapcsolószögének optimalizálása*. Műszaki Tudományos Füzetek – FMTÜ I. (1996) 12–15. <https://doi.org/10.36243/fmtu-1996.03>