



KOSZINUSZ-FOGASKERÉKPÁR PROFILELTOLÁSÁNAK HATÁSAI

EFFECTS OF PROFILE SHIFTING OF A COSINE GEAR

Máté Márton,¹ Gál Károly-István²

¹ Sapiientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Marosvásárhelyi Kar, Gépészmérnöki Tanszék, Marosvásárhely, Románia, mmate@ms.sapiientia.ro

² Sapiientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Marosvásárhelyi Kar, Gépészmérnöki Tanszék, Marosvásárhely, Románia, gal.karoly@ms.sapiientia.ro

Abstract

Cosine gears are a special type of gear drive, in which the tooth profile of the theoretical generating rack is described by the cosine function. According to recent research results, the cosine gear drive has a lower slip coefficient and the contact and bending stresses supported by the teeth during the load are smaller than those occurring in involute gears. The main advantage of the cosine drive pair lies in the apparent higher rigidity of the gear tooth: this can reduce flank wear and increase gear life, especially in heavy load and high-speed applications. In contrast to involute profile gears, cosine gears do not show undercut root fillet, even with small teeth number.

This paper deals with cosine gear tooth profile design and the meshing of the cylindrical cosine gear pair conceived without, or with the application of the profile shifting. The mathematical model of the meshing was implemented in a Mathcad environment, showing that there exists a significant difference compared to the well-known involute gears. The simulation of the motion during the rolling of the gear pairs was realized with the Autolisp programming interface. Solid models were created and tested in the Autodesk Inventor environment.

Keywords: cosine gear, involute gear, meshing, generating rack, profile shifting, simulation.

Összefoglalás

A koszinusz-fogaskerek egy fogaskerékajtások egyik speciális típusát képviselik, ahol a generáló elméleti lécpofilt koszinuszfüggvénnyel írjuk le. A témához kapcsolódó kutatások eredményei azt mutatják, hogy a koszinusz-fogaskerékpár esetében kisebb a relatív csúszás, mint az evolvens fogaskerekknél, továbbá a terhelés alatt ébredő nyomó- és hajlítófeszültségek is kisebbek lesznek. A koszinuszajtópár fő előnye a fogtő láthatóan nagyobb merevségében rejlik: ez csökkentheti a fogaskerek kopását, és növelheti az élettartamukat, különösen nagy terhelésű és nagy sebességű alkalmazásokban. Az evolvens profilú fogaskerekkel szemben a koszinusz-fogaskerek esetében kis fogszám esetén nem jelenik meg alámetszés.

Jelen közleményben a koszinuszajtópár fogprofiljának léccel való származtatását hoztuk létre, majd a kialakított kerek kapcsolódását vizsgáltuk, elemi, illetve kompenzált fogazatokon. A kapcsolódás matematikai modelljét Mathcad környezetben vizsgáltuk, és kimutattuk, hogy ez eltér a hagyományos evolvens fogaskerekétől. Autodesk-Autocad környezetben létrehoztuk a fogaskerékpár modelljeit, majd ezeket vizsgáltuk.

Kulcsszavak: koszinuszajtópár, evolvens ajtópár, burkolás, származtatóléc, profileltolás, szimuláció.

1. Bevezetés

Gépszerkesztők és gépgyártók körében jól ismert tény, hogy a fogaskerek az a gépelemek, amelyek az egységnyi tömegre jutó legnagyobb

nyomatékátviteli képességgel bírnak. A fogaskerek a fogak profíja szerint lehetnek evolvens, pálcs, ciklois vagy köríves kialakításúak. A leggyakrabban alkalmazott fogaskerékprofil az evol-

vens, amelynek számos előnye közé tartozik az áttételi arány tengelytávtól való függetlensége és az egyszerű gyártás. Emellett hátrányai is vannak, mint például a korlátozott terhelhetőség és az interferenciára való hajlam.

Az evolvens fogaskerek esetén a hajtópár háromféleképpen valósítható meg: elemi fogazással, kompenzált fogazással, illetve általános fogazással [1].

Elemi fogazás esetében nincs profileltolás, így a szerszámosztóvonal érinti lefejtéskor az osztóköröket. Ennek megfelelően az osztókörök az osztóvonalon gördülnek le, tehát az osztókörök egybeesnek a gördülőkörkörrel.

Az elemi evolvens fogazatnak legjelentősebb hátrányai az alámetszési fogszámhatárban ($Z=17$), a fogtő szilárdságában és a rossz csúszási viszonyokban jelentkeznek.

Ha a szerszámot a kiskeréken adott távolságra kihúzzuk, és a nagykeréken ugyanakkora távolsággal betoljuk, akkor kompenzált fogazatról beszélünk. Az elemi fogazathoz képest, a profileltolásnak köszönhetően, a szerszámközépvonal a kiskerek osztókörének érintőjétől kifelé $+m\xi$ távolságnyra, illetve a nagykerék esetében az osztókör érintőjétől befelé $-m\xi$ távolságnyra helyezkedik el. Az így kialakított fogaskerékpár esetében a kiskeréken a fogak vastagabbak lesznek, ami maga után vonja a teherbírás növekedését, ezzel ellentétben a nagykeréken a fogak elvékonyodnak, ami a teherbírás csökkenését eredményezi.

A profileltolás legnagyobb előnye, minden vitán felül, az alámetszés elkerülésében áll, ezenkívül pedig a fogoldalok kapcsolódás közbeni csúszása is lényegesen javítható. A kompenzálás eredménye a nulla profileltolás-összeg. Ennek értelmében, ha egy adott fogaskerékpár kiskeréke beleesik az alámetszési tartományba, akkor kompenzálás alkalmazásával, a tengelytáv és a fogszámok megtartása mellett az adott fogaskerékpárnál elkerülhető az alámetszés.

A napjainkban rendelkezésre álló modern és igen pontos, numerikusan vezérelt gépek segítségével olyan fogaskerékprofilok alakíthatók ki, amelyek mind mechanikai, mind kapcsolódási szempontból felülmúlhatják a klasszikus fogaskereket.

Jelen kutatásunkban az evolvens fogaskerek korlátait szem előtt tartva egy olyan, az evolvens profiltól eltérő kompenzált koszinuszprofilú fogaskerékpár szintézisét tűzi ki célul, amely az evolvens fogaskerek hiányosságait hivatott kijavítani, azaz teherbírása nagyobb az evolvens

hajtópárénál, nincsen hajlama interferenciára, és az evolvens kerekre jellemző $Z=17$ minimális fogszám alatt sem jön létre az alámetszés.

2. A koszinuszgeneráló léc

2.1. A klasszikus gyártóléc felépítése

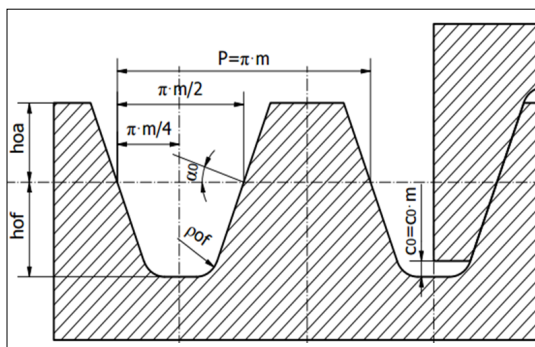
A koszinusz hajtópár szakirodalmi megközelítésében [2] a fogaskereket úgy hozták létre, hogy a koszinuszfüggvény abszcisszáját egyszerűen ráillesztették – nem rágördítették – az osztókörre, mindkét kerék esetében. A kapcsolódás bizonyítva volt, akárcsak a javított fogalak és a növelt terhelhetőség. Véleményünk szerint ez egy CAD-környezet-alkalmazás, amely nem tükrözi a gyártás valóságát. Ebből kiindulva fogalmazódott meg a léccel való gyártás ötlete, Olivier első módszere szerint [3]. A származtatóléc profilját az evolvens fogazat alapprofiljából származtatjuk (1. ábra).

Az általánosíthatóság érdekében az alapprofil egységnyi m (modulra) határozzuk meg. A szabványos alapprofil szög értéke $\alpha=20^\circ$. A fogtő szilárdságának növelése érdekében az előírt fogláb görbületi sugár értéke legyen $\rho_{of}=0.38\cdot m$ [4, 5].

A koszinuszprofilú gyártóléc kialakításában az előbb bemutatott evolvens alapléc paramétereiből indulunk ki, melyeket a modulra építünk.

2.2. Koszinuszgyártóléc-kialakítás egyenlet-módosítással

Előző közleményünkben [6] bebizonyítottuk, hogy a sablon-ellensablon elv [3] koszinuszprofil esetében érvényes, így az egyetlen szerszámmal történő gyártás lehetséges. A koszinuszprofil görbületéből adódóan általános fogazás [7] nem alkalmazható, mivel profileltolás csakis $\Sigma\xi=0$ profileltolásösszeg-érték mellett lehetséges. Ha a lefejtőléc egyenletéből [6],



1. ábra. Szabványos alapprofil [2]

$$y_{s1}(x_{s1}) = a \cos\left(\frac{2}{m} x_{s1}\right) \quad (1)$$

indulunk ki, és a koszinuszprofilú lefejtőlécet profileltolással látjuk el, a $\Sigma\xi=0$ feltételnek megfelelően, akkor (1) tehát kompenzált fogazatot alakítottunk ki. Így a koszinuszléc egyenletét a következő formában írjuk fel:

$$\begin{aligned} y_s(x) &= a \cos(bx) + \xi_s m, \text{ ahol} \\ a &= a_s = b_s = (h_0^* + c_0^* m) \\ h_0^* &= 1, c_0^* = 0,25, \quad \xi_s \neq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

A már meglévő egyenletek alapján, pozitív, illetve negatív profileltolást alkalmazva, a 2. és 3. ábrákon látható lécszerszámprofilokat generáltuk, Mathcad környezetben:

Mivel a koszinuszgyártó lécs egyenletét módosítottuk, a koszinusz-fogaskerékpár generálása a [6] alapján fog megvalósulni, így a kapcsolódási egyenletek formálisan nem változnak.

2.3. Koszinuszgyártóléc-kialakítás elcsúsztatással

A következőkben a kompenzált fogazatot elcsúsztatással fogjuk kialakítani, vagyis a kiskerék esetében a szerszámot $+m\xi$ értékkel kihúzzuk, míg a nagykerék esetében ezt $-m\xi$ értékkel betoljuk az előgyártmányba, így kialakítva a kompenzált fogazást. A koordináta-rendszerek lefejtés közbeni relatív helyzetzeit a 4. ábrán szemléltetjük.

Megjegyzendő, hogy a 4. ábrán illusztrált két kerék koordináta-rendszerét egymáshoz képest ellentétes irányítással választottuk meg. Ez megkönnyíti a számítást, mivel így egyik esetben sem kapunk negatív előjelű kifejezést. Amint az belátható, az O_0O_{ps} lécelmozdulást mindkét kerék ese-

tében az elfordulási szög és az adott kerék osztókör sugarának szorzatával tudjuk meghatározni.

A burkoláshoz felhasznált transzformációs egyenletek mátrixos alakjai a következők:

$$\mathbf{M}_{1ps} = \mathbf{M}_{1p} \mathbf{M}_{0ps} \quad (3)$$

$$\mathbf{M}_{2ps} = \mathbf{M}_{2p} \mathbf{M}_{0ps} \quad (4)$$

Profileltolás esetén a rendszerek közötti transzformációs mátrixok, a [6]-ban található 3. ábra alapján, a következő alakban írhatók fel:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{M}_{10} \mathbf{M}_{0s1} \mathbf{r}_{s1} \\ \mathbf{M}_{1s1} &= \mathbf{M}_{10} \mathbf{M}_{0s1} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{M}_{20} \mathbf{M}_{0s2} \mathbf{r}_{s2} \\ \mathbf{M}_{2s2} &= \mathbf{M}_{20} \mathbf{M}_{0s2} \end{aligned} \quad (5)$$

A burkoláshoz felhasznált transzformációs egyenletek mátrixos alakjai hasonlóak az elemi fogazat képzésénél használt formákhoz, csak a translációoszlopba bekerülnek a profileltolások. Ezen mátrixok kifejtett alakjától jelen közleményben eltekintünk.

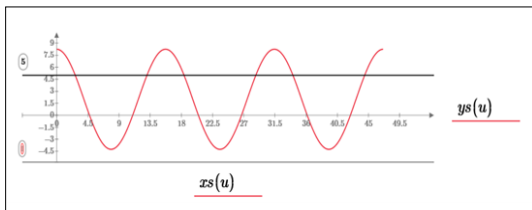
A szögsebességeket, valamint ezeknek ekvivalens eltolásait meghatározó helyvektorok, kompenzált fogazás esetében, a következők lesznek:

$$\underline{\omega}_{01s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \underline{A}_{1s} = \begin{bmatrix} -(r_1 + \xi_s m) \varphi_1 \\ -(r_1 + \xi_s m) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

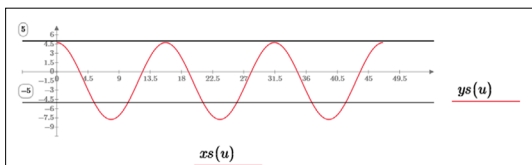
$$\underline{\omega}_{02s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i_{21} \end{bmatrix}; \underline{A}_{2s} = \begin{bmatrix} -(r_2 + \xi_s m) \varphi_2 \\ r_2 + \xi_s m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

A normál vektor alakja a [6]-hoz képest változatlan:

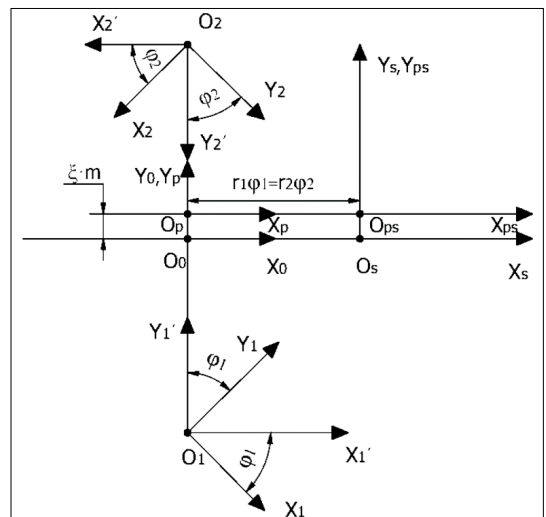
$$\underline{n}(u) = \begin{bmatrix} \frac{2a}{m} \sin\left(\frac{2}{m} u\right) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$



2. ábra. Szerszámprofil $+\xi$ profileltolással



3. ábra. Szerszámprofil $-\xi$ profileltolással



4. ábra. Egyazon léccel történő lefejtés

A számítások elvégzése után a sebességvektorok oszlopai következők lesznek:

$$\underline{v}_{ps}^{(ps,1)} = \begin{bmatrix} -(y_s + \xi_s m) \\ x_s + r_1 \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\underline{v}_{ps}^{(ps,2)} = \begin{bmatrix} i_{21}(y_s + \xi_s m) \\ -i_{21}(x_s + r_2 \varphi_2 + \xi_s m) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Az eddig ismert egyenletek, illetve mátrixok alkalmazásával, és a megfelelő számításokat elvégezve, a kapcsolódási egyenletek explicit alakjai a következők lesznek:

$$\varphi_1(u) = \frac{1}{mz_1} \left(u - \left(\frac{a^2}{m} \sin\left(\frac{4u}{m}\right) + \xi_s m \frac{2a}{m} \sin\left(\frac{2u}{m}\right) \right) \right) \quad (11)$$

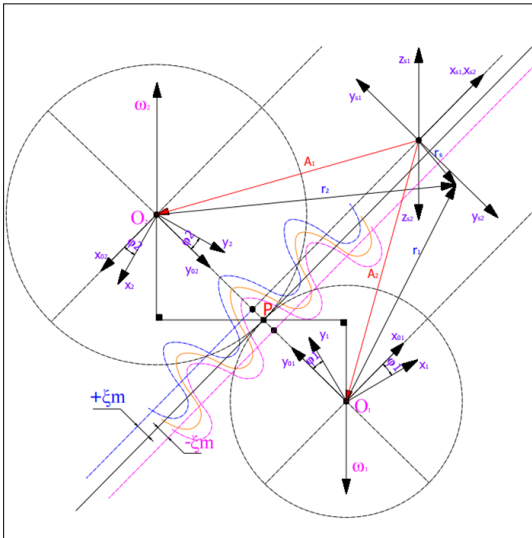
$$\varphi_2(u) = \frac{1}{mz_2} \left(\frac{2a^2}{m} \sin\frac{4u}{m} + 4a\xi_s \sin\left(\frac{2u}{m}\right) - m\xi_s - u \right) \quad (12)$$

2.4. A kapcsolódási egyenletek felírása profileltolás esetén

A kapcsolódási egyenletet az 1. és 2. kerékre írjuk fel, figyelembe véve a profileltolás jelenlétét. Az **5. ábrát** felhasználva felírjuk a relatív sebességeket, melyek a feltüntetett helyvektorokból és szögsebességekből határozhatók meg [7].

$$\begin{aligned} \underline{v}_{s1}^{(1,s1)} &= \underline{v}_{s1}^{(1)} - \underline{v}_{s1}^{(s1)} = \\ &= \omega_{01}^{(1)} \times \underline{r}_{s1} + \underline{A}_1 \times \omega_{01}^{(1)} - \omega_1 r_1 \underline{i}_{s1} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \underline{v}_{s2}^{(2,s2)} &= \underline{v}_{s2}^{(2)} - \underline{v}_{s2}^{(s2)} = \\ &= \omega_{02}^{(2)} \times \underline{r}_{s2} + \underline{A}_2 \times \omega_{02}^{(2)} - \omega_2 r_2 \underline{i}_{s2} \end{aligned}$$



5. ábra. Negatív, illetve pozitív profileltolások koszinuszfogazat esetén

3. Profileltolt (kompenzált) koszinusz- és evolvens kerek gyártásszimulációja és testmodelljei

Ahhoz, hogy a koszinuszlécpofilt minél pontosabban közelítsük, az Autodesk Inventorban 2000 pontot kívántunk felvenni a nagyobb pontosság érdekében, de a megengedett maximálisan importálható pontok száma nem haladhatja meg az 500-at, ezért csupán 500 pontot tudtunk importálni. Az importált pontokat Spline-görbékkel kötöttük össze. A kapott profilból létrehozott léccel az Autolisp programozási környezet segítségével három különböző fogszámú koszinusz-, illetve evolvens fogaskereket generáltunk. Tudva, hogy az evolvens profilú fogaskerek minimális fogszáma $Z=10$, erre az esetre tűztük ki célul az evolvens és a koszinuszprofilú kerek összehasonlítását. A gyártásszimulációk elvégzésekor a megfelelő pontosság elérésének érdekében a léccet, illetve az előgyártmányt 0,2 mm-es osztással léptettük.

Annak érdekében, hogy összehasonlítsuk az evolvens, illetve koszinusz-fogaskerékpárokat, az evolvens fogaskerekre talált profileltolási értékeket alkalmaztuk [9–12].

A generálás során alkalmazott eltolási értékeket az **1. táblázat**ban foglaltuk össze.

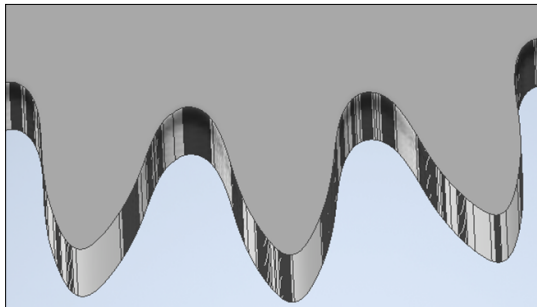
1. táblázat. Alkalmazott profileltolások

Z	$-\xi_{\min}$	$-\xi_{\max}$	$+\xi_{\min}$	$+\xi_{\max}$
10	×	×	×	×
19	-0,4	-0,2	0,2	0,4
27	-0,4	-0,2	0,2	0,4

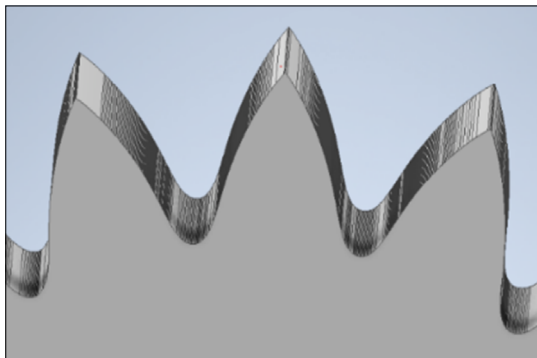
Az **1. táblázat**ban feltüntetett profileltolási értékekre létrehoztuk a fogaskereket, viszont a **6.**, **7.**, **8.**, illetve **9. ábrák**on jelenleg a $\xi=0,4$, illetve $\xi=-0,4$ eseteket tüntettük fel.

Amint az a **6.**, illetve **7. ábrák**on megfigyelhető, a profileltolás nagymértékben befolyásolja a fogalakot. A **6. ábrán** látható $Z=19$ fogú fogaskerék esetében a $\xi=-0,4$ profileltolás hatására a fogak elnyúlnak és elvékonyodnak, ez általában maga után vonja a fogtörés veszélyét, de ez esetben szemmel láthatóan a fogtő robusztus kialakítású, tehát a jelenség nem valószínű.

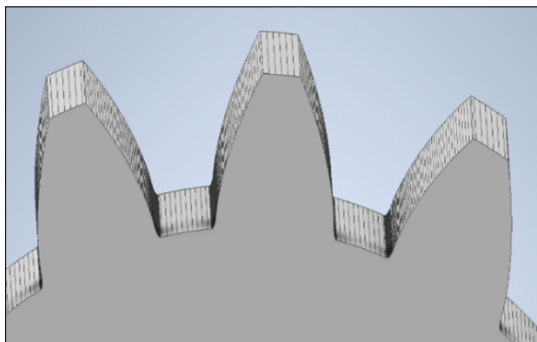
A **7. ábrán** feltüntetett $Z=27$ fogú fogaskerék esetében robusztusabb fog-, illetve fogtő alakul ki, ugyanakkor a fogak kihegyesednek, ami a fogaskerék élettartamát csökkenti.



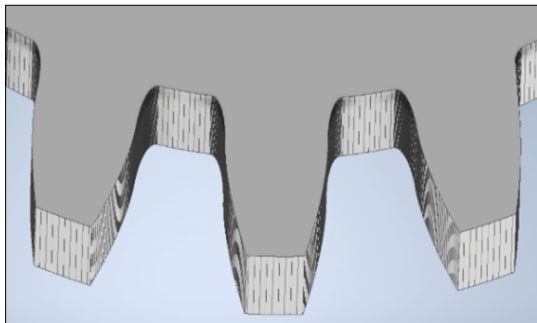
6. ábra. $Z = 19$, $\xi = -0,4$. Koszinuszfogazat



7. ábra. $Z = 27$, $\xi = +0,4$. Koszinuszfogazat



8. ábra. $Z = 19$, $\xi = +0,4$. Evolvens fogazat



9. ábra. $Z = 27$, $\xi = -0,4$. Evolvens fogazat

A 8., illetve 9. ábrán szemléltetünk két profileltolt evolvens fogaskereket, amelyek egy fogaskerékpárt alkotnak. Ebben az esetben ugyancsak pozitív, illetve negatív profileltolást alkalmaztunk, ennek hatására, amint az a 8. ábrán is látható, fogfejkönyödést tapasztalunk. A 9. ábra esetében szembetűnő, hogy a fejszalag növekedik, de a fogtő szilárdsága gyengül. Egyik evolvens fogazat sem közelíti meg a koszinusz-fogaskerek robusztus fogtövet.

Kimondható, hogy akár elemi, akár kompenzált fogazatot kívánunk kialakítani, a koszinuszprofilú kialakítás szilárdsági-merevségi szempontból sokkal előnyösebb.

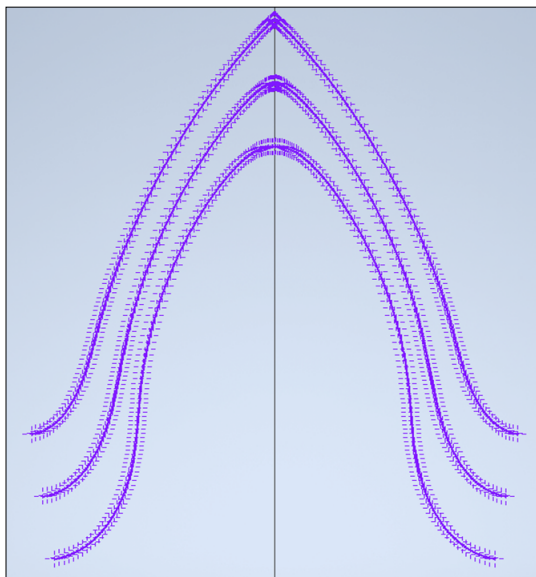
4. A profileltolás hatása a koszinusz-profil alakjára

A 10. ábrán szemléltetjük a $Z = 19$ fogú evolvens fogaskerek profiljait, elemi, pozitív, illetve negatív profileltolási helyzetekben.

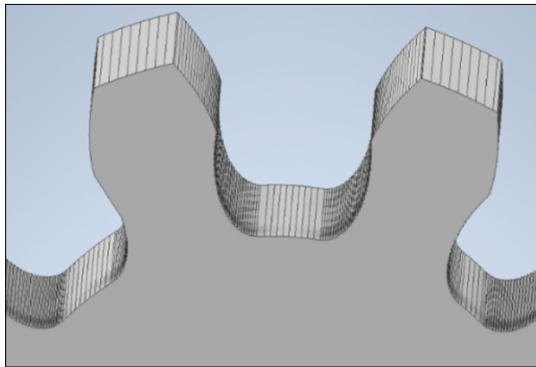
Amint azt láthatjuk, a profileltolás hatással van a profil alakjára, a fejkörátmérőre, a lábkörre, a fogtő alakjára, illetve az adott profilú fogaskerek élettartamára.

5. Az alámetszés kiküszöbölése

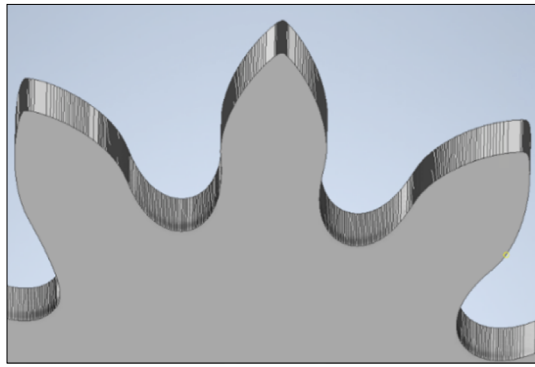
Amint azt már említettük, a legelterjedtebb fogaskeréktípus az evolvens, ennek legnagyobb hátránya a korlátozott minimális fogszámhatár. A fogszámhatár azért korlátozott evolvens kerek esetében, mert $Z = 17$ fogszám alatt, gyártás-



10. ábra. Profileltolt koszinusz-fogaskeréprofilok



11. ábra. $Z = 10$ fog. Evolvens profil



12. ábra. $Z = 10$ fog. Koszinuszprofil

kor a szerszám kikotorja a fogaskerék fogtövet, tehát alámetszi a gyártott fogaskereket, ahogy ez a 11. ábrán szembeszökő. Az alámetszés a szemléltetett evolvens fogaskerék esetében olyan nagy, hogy a létrehozott fogláb görbe ívhossza majdnem nagyobb, mint a működő fogoldal ívhossza. Ezzel ellentétben, a 12. ábrán szemléltetett koszinusz-fogaskerék fogán nem jelentkezik az alámetszés, tehát koszinusz-fogaskerek esetében a minimális fogszámhatár az evolvens fogazathoz képest csökkenthető. Ez későbbi tanulmányunk egyik célja.

6. Következtetések

A profileltolás jelentősen befolyásolja a fogaskerék profiljának alakját, illetve teherbíró és nyomatékátviteli képességét.

Amikor fogaskerékpárt generáltunk, észrevettük, hogy ha különböző fogszámú fogaskereket gyártunk, a nagyobb fogszám előnyösebb, mivel ekkor erősebb fogtövet tudunk kialakítani koszinuszgörbe esetében.

A koszinusz-fogaskerek, fogláb görbék alakját tekintve, kedvezőbbek, mint az evolvens fogazat, mivel az evolvens esetében gyengébb fogtő alakul ki, ez jelentősen befolyásolja a nyomatékátviteli képességet és a terhelhetőséget, ami az élettartam csökkenéséhez vezet.

A koszinuszfogazat esetében, kis fogszámoknál, a fogat közrezáró profilok közötti távolság jelentősen csökken a fejkör felé haladva, ami a kihegyesedés veszélyét hordozza.

Koszinuszprofil alkalmazásával $Z = 17$ -nél kisebb fogszámú elemi kerek is kialakíthatók.

Szakirodalmi hivatkozások

- [1] Pálfi K., Prezenszky Tibor., Csibi V., Antal B., Gyenge Cs., Balogh F.: *Fogazott alkatrészek tervezése, szerszámai és gyártása*. Gloria Kiadó, Kolozsvár, 1999.
- [2] Shanming Luo, Yue Wu, Jian Wang: *The Generation Principle and Mathematical Models of a Novel Cosine Gear Drive*. Mechanism and Machine Theory, 43. (2008) 1543–1556.
- [3] Litvin F. L.: *A fogaskerékapcsolás elmélete*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.
- [4] DIN 867:1986, Basic Rack Tooth Profiles for Involute Teeth of Cylindrical Gears for General Engineering and Heavy Engineering.
- [5] ISO 21771:2007(en) Gears — Cylindrical Involute Gears and Gear Pairs — Concepts and Geometry.
- [6] Máté M., Gál K. I., Tolvaly-Rosca F.: *Koszinuszprofilú lefejtőléccel gyártott fogaskerékpár szintézise és CAD-vizsgálata*. Műszaki Tudományos Közlemények, 19. (2023) 37–43. <https://doi.org/10.33895/mtk-2023.19.06>
- [7] Szeniczai L.: *Az általános fogazás*. Nehézipari Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1958. 49–50.
- [8] Tolvaly-Rosca F.: *A számítógépes tervezés alapjai: AutoLisp és Autodesk Inventor alapismeretek*. MTF 7, Erdélyi Múzeum-Egyesület, Kolozsvár, 2009. <https://doi.org/10.36242/mtf-07>
- [9] Vörös I.: *Gépelemek III.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1957.
- [10] Rohonyi V., Killmann V.: *Fogaskerékhajtások*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1980.
- [11] Máté M.: *Hengeres fogaskerek gyártószerszámai*. MTF 12, Erdélyi Múzeum-Egyesület, Kolozsvár, 2016. <https://doi.org/10.36242/mtf-12>
- [12] Hollanda D.: *Așchiere și scule*. Reprografia I. I. S. Tg. Mureș, 1994. (234-240).