



BŰVÖS NÉGYZET MAGIC SQUARE

Kakucs András,¹ Harangus Katalin,² Király Zsolt³

¹ Sapientia-EMTE, Gépészmérnöki Tanszék, Marosvásárhely, Románia, kakucs2@ms.sapientia.ro

² Sapientia-EMTE, Tanárképző Intézet, Marosvásárhely, Románia, katalin@ms.sapientia.ro

³ Sapientia-EMTE, Marosvásárhelyi Kar, Mechatronika IV, Románia, kiraly.gy.zsolt@student.ms.sapientia.ro

Abstract

As a state exam thesis, we are implementing an interactive, electronic, but non-computer-based fourth-order magic square as a logic game. To solve the magic square, we use an improved version of a method originally published in an old book [1], which we present here. The game is produced using 3D printing. Its interactive component consists of tiles displaying the numbers to be placed, which contain transmitters, a microcontroller that receives their signals, and a connected touchscreen display.

Keywords: *magic square, interactive logic game.*

Összefoglalás

Államvizsga-dolgozat formájában egy interaktív, elektronikus, de nem számítógépes, negyedrendű bűvös négyzetet valósítunk meg, logikai játékként. A bűvös négyzet megoldásához egy régi könyvben [1] megjelent módszer általunk továbbfejlesztett, itt ismertetett változatát használjuk fel. A játék 3D-nyomatással készül el. Az interaktív részét az elhelyezendő számokat mutató csempékben levő jeladó, az azok jelét vevő mikrokontroller és a hozzácsatolt érintőképernyős kijelző jelenti.

Kulcsszavak: *bűvös négyzet, interaktív logikai játék.*

1. Bevezetés

Mi a bűvös négyzet?

A bűvös négyzet természetes számok olyan táblázatos elrendezése, amelyben a számok összege soronként, oszloponként, illetve az átlók mentén mindig ugyanannyi. Ez az összeg a bűvös négyzet állandója, másként a *bűvös összeg*. A bűvös négyzetek tehát a felsorolt tulajdonságokkal rendelkező négyzetes mátrixok, a tanulmányozásuk pedig a szórakoztató matematika tárgyköréhez tartozik.

A bűvös négyzet *rendje* a sorok és az oszlopok száma, jelöljük n -nel. A négyzet felépítésében n^2 szám vesz részt. E számok sorrendjének tekintetében többfajta bűvös négyzetet is meg lehet különböztetni. A szoros felépítésűeket egymást követő számok alkotják, kiugrások és ismétlődések nélkül. Ha vannak kiugrott számok, akkor a négyzet hézagos, ha pedig az ismétlődő számokat tartalmaz, akkor ismétléses.

A bűvös négyzetek története a múlt homályába vész. Az első biztos említés szerint Kínában, az első évszázadban látott napvilágot a harmadrendű bűvös négyzet, azonban vannak olyan vélekedések is, hogy az akár két évezreddel előtte is már ismert lehetett. Lehet, hogy a mágikusként ható varázslatos tulajdonságai miatt vagy pedig szórakoztató agytornaként, de az idők folyamán sokfelé foglalkoztak e témával, míg arab közvetítéssel az Európába is eljutott a XI. sz. folyamán. A bizánci Manuel Moschopoulos az 1300-as évek elején matematikai értekezést írt róluk, mellőzve a hozzájuk fűződő közel-keleti miszticizmust, útmutatást adván azok felépítésére. A nyugati világban viszont jó ideig az okkultizmus övezte a bűvös négyzeteket: ismerték, leírták őket, de nem született feljegyzés azok előállítási módjáról. Mágikusnak tartott mivoltukra utal az is, hogy a szoros felépítésű bűvös négyzeteket az égitestekkel társították: a Szaturnuszhoz a harmadren-

dűt, a Jupiterhez a negyedrendűt, és így tovább, a Marshoz, a Naphoz, a Vénuszhoz, a Merkúrhoz és a Holdhoz, az ötödrendűtől a kilencedrendűig. Ez nem volt valami kivételes dolog, hiszen például a fémeket és a drágaköveket, de a hét napjait is ugyanígy társították az égitestekhez, az asztrológia és az alkímia hagyományai szerint. Mindenesetre így kerülhetett az érdeklődés európai fókuszába, és ekként jelentek meg a XVI. sz.-tól kezdve a különböző létrehozási technikák.

A bűvös négyzetek történetével foglalkozó irrományok rendszerint megemlítik Albrecht Dürer 1514-ben elkészített misztikus *Melankólia I* című metszetét (1. és 2. ábra), ahol a számos, szimbolikus részlet között egy negyedrendű bűvös négyzet is megjelenik. Modern kori példázata pedig a barcelonai *Sagrada Familia* templom délnyugati bejárata melletti, ismétléses bűvös négyzet (3. ábra), ahol az összeg Jézus Krisztus földi éveinek a száma, azaz 33. Ez utóbbi az előbbi enyhén módosított változata.

2. A bűvös négyzet létrehozása

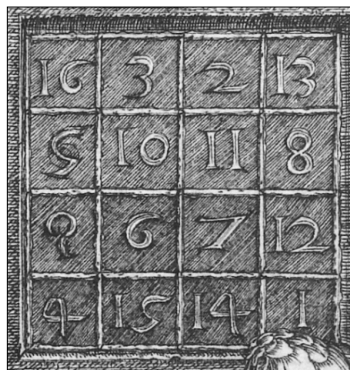
A bűvös négyzet felépítésében az egyik támpont a bűvös összeg. Ha a számsorozat első tagja az 1-es, akkor az n -ed rendű négyzet felépítésében az 1, 2, 3, ... természetes számok vesznek részt, egészen n^2 -ig. Az egyszerűség kedvéért jelöljük a legnagyobb számot, vagyis n^2 -et m -mel. A négyzet felépítésében részt vevő számok összegét tehát a megfelelő számtani sorozat összegképletével az $M = m \cdot (m + 1) / 2$ számként határozhatjuk meg. Mivel a négyzet n sorból áll, és minden sorban a bűvös összeg ugyanaz kell, hogy legyen, nyilván ez nem lehet más, mint az $N = M/n$ szám. Mivel természetes számokat adunk össze, N is, és M is természetes szám kell legyen.

Ha a számsort nem az 1-es-től kezdjük, hanem egy nagyobb (vagy, ha elfogadjuk azt, hogy nulla vagy negatív számok is megjelenjenek benne, kisebb) k számtól, akkor a számsorozat minden egyes tagja $k-1$ -gyel fog eltolódni, a bűvös összeg pedig $n \cdot (k-1)$ -gyel lesz nagyobb (vagy kisebb). Ez lényeges változást a négyzet felépítésében nem okoz, emiatt a továbbiakban csak az 1-gyel kezdődőkkel foglalkozunk.

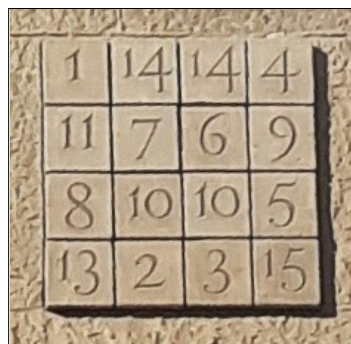
A bűvös négyzetek említett tulajdonságai alapján észre lehet venni, hogy az elsőrendű bűvös négyzet csupán egy 1-es számjegyet tartalmazó táblázat lenne. Azt is rögtön észrevehetjük, hogy szoros másodrendű, négyzetes mátrix nem létezik: ha ennek pl. a bal felső sarkában elhelyezzük az 1-es-t, akkor amellé, az alá és átlósan is ugyan-



1. ábra. Albrecht Dürer: *Melankólia I* (metszet, 1514)



2. ábra. Kinagyított részlet a bűvös négyzettel



3. ábra. A barcelonai *Sagrada Familia* templom bejáratánál levő bűvös négyzet

azt a számot kellene odaírni ahhoz, hogy a bűvös összeg minden irány szerint meglegyen. Ez a második szám pedig ugyanaz kell, hogy legyen, mint ami a bal felső sarokban szerepel, mert egyébként a második sorban, a második oszlopban és a másik átló mentén nem jön ki a bűvös összeg. Következésképpen a másodrendű bűvös négyzet csak egy triviális, ugyanazt a számot négyszer tartalmazó, ismétléses négyzet lehet.

A harmadrendű négyzet megalkotása már egy bonyolultabb folyamat. Ha próbálkozással akarjuk a négyzetet kitölteni az első kilenc természetes számmal, akkor a lehetőségek eléggé nagy száma fog gondot okozni, hiszen $9! = 362880$ különböző elrendezésben lehet sorba állítani. Ez kilenc elem permutációinak a száma, ami emberi léptékben eléggé nagy ahhoz, hogy a próbálkozásokra alapozó megoldás ésszerűtlenné váljon.

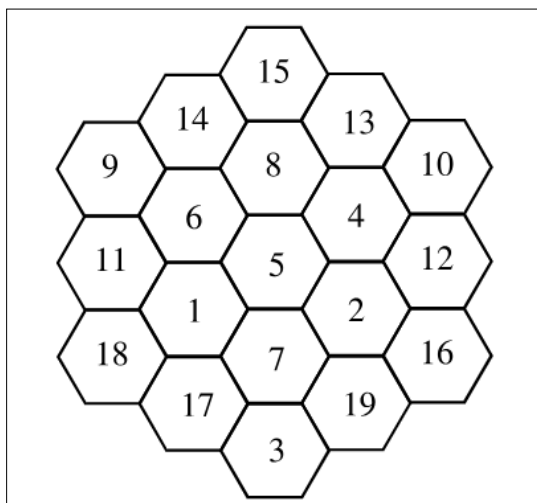
A pusztán próbálkozással való megoldás nehézségét a bűvös hatszöggel lehet példázni (4. ábra). Ez is egymást követő számok egyfajta táblázata, azonban ez a táblázat három irány szerint sorolja az elemeket. A számokat úgy kell beírni, hogy irányonként az összeg ugyanaz legyen. A 19 szám összegét az irányonkénti öt „sor” között elosztva a bűvös összeg 38.

A feljegyzések szerint a feladványt 1910-ben közzétette egy *The Pathfinder* című hetente megjelenő helyi lap, Washingtonban. Az akkor 19 éves Clifford W. Adams ráharapott a témára, és elhatározta, hogy meg fogja oldani azt. Ahhoz, hogy gyorsabban menjen a megoldás, hatszögletű kerámialapocskákat használt, amire felírta a számokat. A feladvánnyal a szabad idejében fog-

lalkozott, és végül is 1957-ben, kórházi lábadozás közben jutott el a megoldásig. Azt fel is jegyezte egy papírra, de az elveszett, így újabb öt évnek, tehát összesen egy fél évszázadnál hosszabb időnek kellett eltelnie, míg a megoldás előkerült. Adams ezt a megoldást elküldte egy matematikusnak, aki behatóbb vizsgálat alá vette a feladványt, az így került a figyelem központjába. Az idők során kiderült, hogy Adams megoldása, leszámítva a tükrözött és elforgatott változatokat, az egyedüli lehetséges – ezt számítógépen elvégzett próbálkozásokkal bizonyították be. Az is kiderült, hogy ennél kisebb vagy nagyobb bűvös hatszög nem létezik. Sikertült kidolgozni reá egy olyan eljárást, amely a megvizsgálandó konfigurációk számát lényegesen csökkenti, így számítógép nélkül is aránylag könnyen el lehet jutni a megoldásig. E feladvány egyébként korábbi, azt először 1888-ban publikálta Ernst von Haselberg egy matematikai lapban (*Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*), a megoldását pedig egy évvel később, ugyanott tette közzé.

A harmadrendű bűvös négyzet előállításának egy lehetséges célratörő megoldása a következő: a szoros, 1-estől induló harmadrendű négyzet bűvös összege 15. Felírjuk azokat a lehetséges számhármassokat, amelyeknek az összege ennyi. A könnyebb tájékozódás kedvéért olyan módon, hogy 1-től 9-ig minden szám mellé odaírjuk a másik két lehetséges számot (emiatt a felsorolás ismétlődéseket tartalmaz, 5. ábra).

Nos, ebből a felsorolásból kiderül, hogy egyedül az ötös szerepel négyfajta elrendezésben, így csak ez a szám szerepelhet a négyzet közepén (ugyanis



4. ábra. Bűvös hatszög

1	5	9	6	1	8
1	6	8	6	2	8
			6	3	7
2	4	9	7	2	6
2	5	8	7	3	5
2	6	7			
3	4	8	8	1	6
3	5	7	8	2	5
			8	3	4
4	2	9	9	1	5
4	3	8	9	2	4
4	5	6			
5	1	9			
5	2	8			
5	3	7			
5	4	6			

5. ábra. 15 összegű számhármassok

egy sorban, egy oszlopban és mindkét átló mentén ott kell lennie), **6. ábra**.

Ugyanígy észre lehet venni, hogy a sarkokban csak 2, 4, 6 és 8 lehet, ugyanis ezek szerepelnek három-három elrendezésben. A sarkok egy sor, egy oszlop és egy átló metszéspontjában vannak. Ha a bal felső sarokba beírjuk a 2-est, akkor a jobb alsóba csak a 8-as kerülhet, hiszen a bűvös összeg csak így jön ki. Ha a jobb felsőbe beírjuk a 4-est, akkor pedig a bal alsóba csak 6-os kerülhet (**7. ábra**).

A többi szám csak két elrendezésben szerepel, ezek egy sor és egy oszlop kereszteződésébe kerülnek (az átlókon kívül). A bűvös összeget szem előtt tartva, egyszerűen kitöltjük a megmaradt négy helyet (**8. ábra**).

Ha a két felső sarokba más számokat írunk, az így kapott elrendezés elforgatott és/vagy tükrözött változatait kapjuk (összesen nyolcat), ha ezektől azonban eltekintünk, akkor kijelenthetjük, hogy csak egyfajta szorosan illeszkedő bűvös négyzet létezik (a mindkét irány szerint egyszerre történő tükrözés 180 fokos elforgatást jelent, a második irány szerinti tükrözéssel is az első szerint tükrözött négyzet elforgatott változatát kapjuk).

3. A negyedrendű bűvös négyzet

A nagyobb bűvös négyzetek létrehozása már nem ilyen egyszerű feladat. Munkánkban Berger György 1986-ban megjelent *Bűvös négyzetek* című könyvében [1] közzétett észrevétel alapján indultunk el. Eszerint, egy negyedrendű bűvös négyzet példázatában, ha a számsort 0-val kezdjük, akkor a sorozat 16 elemét négyes számrendszerben fel-

írva, azoknak a $00_4, 01_4, \dots, 33_4$ formájához jutunk. E számok egy 0 és 3 közötti első (jobb oldali) és ugyancsak 0 és 3 közötti, második helyi értékű (bal oldali) számjegyből állnak. A teljes sorozatban négy olyan szám van, amelynek az első helyi értéke 0, négy olyan, amelynek 1 és így tovább, és ugyanez vonatkozik a második helyi értékre is (tehát négy olyan szám van, amelynek a második helyi értéke 0, stb.). A bűvös összeg kiszámításához négy számot kell összegeznünk, vagyis az négy első és négy második helyi értékű szám összege lesz. Ha minden sorban, oszlopban, valamint a két átló mentén a helyi értékek összege külön-külön ugyanaz a szám lesz, akkor az ott szereplő számok összege is ugyanaz lesz: a bűvös összeg. Ezek szerint, figyelembe véve, hogy minden számjegy helyi értékenként négyszer fordul elő, ha a táblázatot úgy töltjük ki, hogy bármely sorban, oszlopban, valamint a két átló mentén minden számjegy helyi értékenként csak egyszer szerepel benne, akkor az így kapott négyzet bűvös négyzet lesz. Ez azonban nem pont annyira egyszerű, mint első elolvasásra tűnik, mert ki kell zárunk az ismétlődéseket.

Könnyebben követhető a folyamat, ha a számokat színekkel helyettesítjük, és ha helyi értékenként külön-külön táblázattal dolgozunk. Másképpen: a színekkel speciális felépítésű latin négyzeteket alkotunk: olyanokat, hogy nem csak a sorokban és az oszlopokban, hanem az átlók mentén is egy-egy szín csak egyszer forduljon elő. Az említett könyvben szín-bűvös négyzeteknek nevezi ezeket a szerző. Az ilyen négyzetek előállítására is egy logikai játék, a kereskedelemben kapható egyik verziója a ThinkFun márkájú „Color Cube Sudoku”, amelynek az egyik lehetséges megoldott állapota a **9. ábrán** látható.

	5	

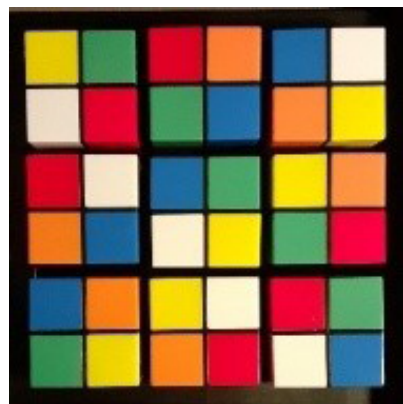
6. ábra. A harmadrendű bűvös négyzet közepe

2		4
	5	
6		8

7. ábra. A harmadrendű bűvös négyzet sarkai

2	9	4
7	5	3
6	1	8

8. ábra. A harmadrendű bűvös négyzet

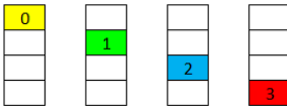


9. ábra. Szín-bűvös négyzet (ThinkFun: Color Cube Sudoku)

Két olyan négyzetet kell létrehozunk, amelyeket egymásra téve minden lehetséges színkombináció csak egyszer szerepel.

Az így kidolgozott eljárás a következő lépéseket tartalmazza:

1. A főátlón (a bal felső saroktól a jobb alsó sarokig) elhelyezzük a négy színt:



2. A mellékátlón (a bal alsó saroktól a jobb felsőig) ugyanezeket a színeket más sorrendben helyezzzük el, de úgy, hogy egy sorban vagy egy oszlopban ne szerepeljen kétszer ugyanaz a szín. Csak két ilyen lehetőségünk van (a példánkban a kék–piros–sárga–zöld sorrend a második lehetőség):



3. Az üresen maradt részeket könnyen kitölthetjük, vigyázzván az ismétlődések elkerülésére. A mellékelt példában az első oszlopban a piros csakis a harmadik sorban szerepelhet, ezután pedig a második oszlopban levő piros egyértelműen az első sorban kell, hogy legyen. Az első oszlopban az üresen maradt helyre csakis a kék kerülhet, ugyanígy a második oszlopot is a kék egészíti ki. A harmadik oszlopban a sárga csak alul lehet, így a zöld annak a tetejére kerül. A negyedik oszlop két hiányzó elemének, a sárgának és a zöldnek, ekkorra már adott lesz a helye:



4. A második négyzet főátlója lehet ugyanolyan, mint az elsőé volt, de a mellékátlón a színek más sorrendben kell, hogy álljanak (az említett második lehetőségről van szó):



5. A második négyzetben kitöltjük az üresen maradt részeket. Ha a főátlót megtartjuk, akkor a második négyzet az első transzponáltja lesz.



6. A két szín-bűvőnégyzetből összeállítjuk a bűvő négyzetünket: ha az i -edik sor és a j -edik oszlop keresztmetszetében az elsőben az A_{ij} , a másodikban pedig a B_{ij} négyes számrendszerbeli szám áll, akkor a bűvő négyzet megfelelő helyére az $A_{ij} + B_{ij} + 1$ tízes számrendszerbeli számot kell beírni, ahol az egységet azért adtuk hozzá az átszámított értékhez, hogy a sorozat ne 0-val, hanem 1-gyel kezdődjön. Íme az eredmény a **10. ábrán**.

Ha a főátlón levő első két (0 és 1) vagy utolsó két (2 és 3) tagot felcseréljük, akkor a négyzet *páncsdiagonális* lesz, vagyis az átlóval párhuzamos „törtát-lók” mentén is a bűvős összeget kapjuk. (**11. ábra**)

Megjegyzendő, hogy a szín-bűvőnégyzetek eme módszere csak az egyik lehetőség a sok közül, és a lehetséges bűvős négyzeteknek csak egy részét lehet így előállítani, viszont ez egy eléggé egyszerű, vizuális megoldás.

Nem mindenik bűvős négyzethez tartozó szín-négyzetek bűvősek (vagyis nem rendelkeznek a szín-bűvőnégyzetek tulajdonságaival). Íme a Dürer-féle négyzet esete a **12. ábrán**.

1	15	8	10
12	6	13	3
14	4	11	5
7	9	2	16

10. ábra. Negyedrendű bűvős négyzet

1	15	10	8
12	6	3	13
7	9	16	2
14	4	5	11

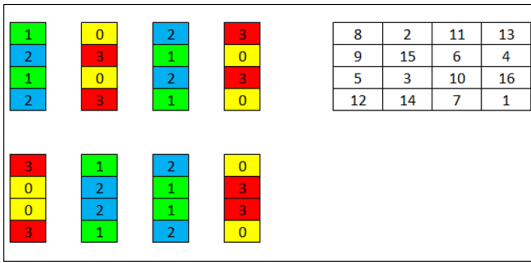
3	15	10	8
12	6	3	13
7	9	16	2
14	4	5	11

11. ábra. Páncsdiagonális, egyedrendű bűvős négyzet

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

3	15	10	8
12	6	3	13
7	9	16	2
14	4	5	11

12. ábra. Dürer bűvős négyzete



13. ábra. Egy általánosabb szerkezetű bűvös négyzet

Azonban észrevehetjük, hogy a számok (helyértékek) összege függőlegesen, vízszintesen, valamint a két átló mentén mindig 6 (pontosabban: 12_4), mind a négy szám négyszer szerepel, a két négyzet átfedésénél pedig továbbra sincsenek ismétlődő párok. Az első négyzet első sorában például $3_4 + 0_4 + 0_4 + 3_4 = 12_4$, ugyanakkor $0_4 + 1_4 + 2_4 + 3_4 = 12_4$.

Ezen észrevételek alapján általánosabb formájú bűvös négyzeteket is létrehozhatunk, pl. mint a 13. ábrán.

4. A negyedrendű négyzet bűvös tulajdonságai

A negyedrendű bűvös négyzetekkel kapcsolatban még megemlíthető az a tény, hogy nem csak sorok, oszlopok, átlók és esetleg tört átlók mentén van meg a bűvös összeg. Egy bizonyíthatóan általános tulajdonságuk az, hogy a bűvös összeget kapjuk:

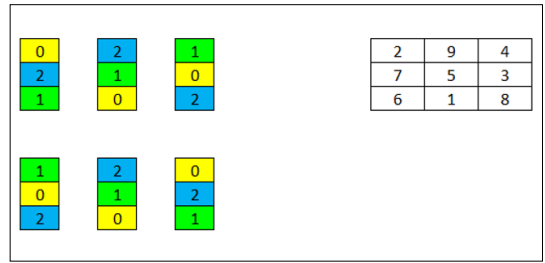
- négy szimmetrikusan elhelyezkedő szám esetén (a négy sarok, illetve a négyzet közepén levő négy számról van szó);
- a sarkokhoz igazított 4×4 -es partíciók esetén;
- ha a négyzet pándiagonális, akkor bármelyik 4×4 -es partíció esetén;
- az első sor két középső és az alsó sor két középső elemére;
- a bal oldali oszlop két középső és a jobb oldali két középső elemére

(tehát nem véletlenül gondolták varázslatos dolognak ezeket a négyzeteket).

Ha próbálgatással szeretnénk negyedrendű bűvös négyzetet létrehozni, akkor ezeket a tulajdonságokat is fel lehet használni.

5. A módszer kiterjesztése egyéb rendű bűvös négyzetekre

A módszer az első, egyszerűen algoritmizálható, szín-bűvös négyzetekre alapozó verziójában a harmadrendű bűvös négyzetre nem alkalmazható, azonban az ismétlődések megengedésével már



14. ábra. Alkalmazás a harmadrendű bűvös négyzetre

meg tudjuk oldani ezt a feladatot is (soronként, oszloponként és a két átló mentén a helyértékek összege ugyanannyi kell, hogy legyen, 14. ábra):

Az ötödrendű bűvös négyzetnek ezzel a technikával történő létrehozása egy kissé körülményesebb, de megoldható. Az ötös számrendszerben kell dolgoznunk, tehát öt színnel. Ez például a következő lépéseken keresztül történhet:

1. Az első négyzet főátlóján elhelyezzük a számokat 0 és 4 között:

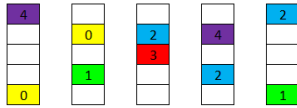


2. A mellékátlón e számokat úgy helyezzük el, hogy az oszlopokban és a sorokban ne forduljon elő ugyanaz a színpáros. Ugyanabban a sorban vagy ugyanabban az oszlopban nem fordulhat elő kétszer ugyanaz a szín. E megkövetések miatt a mellékátlón csak egyféle módon tudjuk elhelyezni az elemeket. Az átlók metszéspontjában levő szín nem számít kétszeresnek, a középső sorban és a középső oszlopban csak ez az egy elem foglal helyet. Az említett színpáros alatt azt a két színt értjük, amelyek pl. egy oszlopban szimmetrikusan helyezkednek el: a tetején és az alján, valamint a második és a negyedik helyen levő színek alkotják azokat:

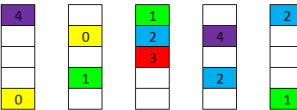


3. A főátló feletti és alatti háromszögeket úgy töltjük ki, hogy háromszögenként minden szín kétszer szerepeljen, egy sorban és egy oszlopban pedig ne forduljon elő kétszer ugyanaz a szín. Lépésről lépésre kell haladnunk, amilyen sorrendben a már elhelyezett színek rögzítik a következőt.

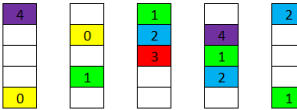
–A példában az első elhelyezhető szín a felső háromszögben a második kék, amely csak a harmadik oszlop második helyére kerülhet:



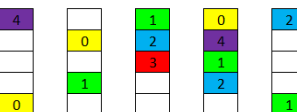
–A felső háromszögben zöld csak a harmadik és a negyedik oszlopban lehet. A harmadiknak biztos a tetején, mert ott más üresen maradt hely nincs:



–Ekképpen a felső háromszögben a második zöld a negyedik oszlopban, a harmadik helyen lehet:



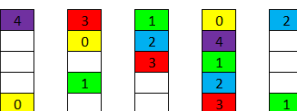
–A felső háromszögben két sárga kell, hogy legyen. Ezek a negyedik és az ötödik oszlopban fordulhatnak elő. Az első sárga a negyedik oszlop tetejére kell, hogy kerüljön, de a másodiknak egyelőre nem tudjuk megmondani a helyét:



–A felső háromszögben a többi elem helyzete még nem egyértelmű, így leköltözünk az alsó háromszögbe. Észrevehetjük, hogy a negyedik oszlop aljáról már csak egy piros hiányzik:



–A felső háromszögben is kell, hogy legyen két piros. Az első piros csak a második oszlop tetején lehet:



–A felső háromszögbe most sem illeszthetünk be további elemeket, de észrevehetjük, hogy az

alsó háromszögben az egyik sárga a harmadik oszlopban a negyedik helyen kell legyen:



–A harmadik oszlop aljáról már csak a lila hiányzik, miért ne folytatnánk ezzel?



–Az alsó sorban szintén már csak egy hely maradt üresen, a második. Ide kék kell, hogy kerüljön:



–A második oszlopból is csak egy elem maradt ki: annak a hiányzó, középső eleme csak lila lehet:



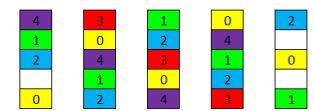
–Megkeressük, hogy van-e olyan szín, amely már négyszer is előfordul. Az egyik ilyen a sárga. Ez az utolsó oszlop közepén kell, hogy legyen:



–A másik ilyen szín a kék. Hasonlóképpen, az első oszlopban a kék szintén csak annak a közepén lehet:



–Az ötödik zöld az első oszlopban a második helyre passzol:



–Az első oszlopot a negyedik helyre beillesztett piros egészíti ki:

4	3	1	0	2
1	0	2	4	
2	4	3	1	0
3	1	0	2	4
0	2	4	3	1

–A második sor utolsó eleme piros kell, hogy legyen, ez lenne az ötödik piros elem:

4	3	1	0	2
1	0	2	4	3
2	4	3	1	0
3	1	0	2	4
0	2	4	3	1

–Az utolsó oszlopot s ezzel a négyzetet a negyedik helyre találó lila fejezi be:

4	3	1	0	2
1	0	2	4	3
2	4	3	1	0
3	1	0	2	4
0	2	4	3	1

Észrevehetjük, hogy a számok főátlón levő sorrendje eléggé egyértelműen meghatározza a négyzet felépítését. Az adott főátlóhoz illő mellékátlót kétfajta módon tudjuk megalkotni, de ha ez megvan, akkor onnan kezdve a négyzetet csak egyféleképpen lehet kitölteni. Az átlón a sorrend megváltoztatásával egy újabb négyzetet kapunk: a főátlón az öt elemet 120-féle módon lehet sorrendbe állítani, így a két-két lehetséges mellékátlóval összesen 240 változathoz jutunk (közöttük az elforgatott, tükrözött változatokhoz is), azonban minden így megalkotott szín-bűvös négyzet struktúrája ugyanaz marad.

- A második négyzetet az elsőből állíthatjuk elő, azt transzponálva, vagy pedig a sorait vízszintesen vagy az oszlopait függőlegesen tükrözve. Mi több, teljes pivotálással is egy újabb szín-bűvös négyzethez jutunk: ehhez az i-edik sort felcseréljük a j-edikkel, az i-edik oszlopot pedig a j-edikkel (csak két sor vagy csak két oszlop felcserélésével az átlók mentén nem jön össze a bűvös összeg). Ezeket a módszereket kombinálni is lehet. Az ábrán a második négyzet az első függőleges tükröképe.
- A bűvös négyzetet a két szín-bűvös négyzetből a már ismert módon állítjuk elő (lásd 15. ábra)

4	3	1	0	2
1	0	2	4	3
2	4	3	1	0
3	1	0	2	4
0	2	4	3	1

23	16	7	4	15
9	5	13	21	17
11	22	19	10	3
20	8	1	12	24
2	14	25	18	6

2	0	1	3	4
3	4	2	0	1
0	1	3	4	2
4	2	0	1	3
1	3	4	2	0

15. ábra. Ötörendű bűvös négyzet szín-bűvös négyzetekkel létrehozva

6. Interaktív bűvös négyzet

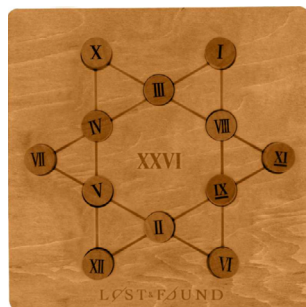
A bűvös kocka (Rubik kocka) kultuszának újraledésével megnövekedett az érdeklődés a különféle kirakósok (puzzle) és egyéb logikai játékok iránt. Egy egész iparág alakult ki e körül, aminek a súlypontja Kínában van. A bűvös négyzet, a bűvös hatszög, és egy közeli rokonuk, a bűvös csillag is megjelent a piacon, fából készült kirakósként (az első „Wooden Number 1-16 Puzzle” (16. ábra), a második „Aristotle’s Number Puzzle” (17. ábra), a harmadik pedig „Roman Numeral Puzzle” (18. ábra) néven).



16. ábra. Negyedrendű bűvös négyzet mint „Wooden Number 1-16 Puzzle” (Temu, márka nélküli termék)



17. ábra. Bűvös hatszög mint „Aristotle’s Number Puzzle” (Professor Puzzle, „Great Minds” sorozat)



18. ábra. Bűvös csillag mint „Roman Numeral Puzzle” (Professor Puzzle, „Lost & Found” sorozat)

Több más logikai játék azonban elektronikus verzióban is megjelent: ez azt jelenti, hogy maga a játék kézzel fogható, tehát nem számítógépes, azonban egy beépített áramkör tart kapcsolatot a játék és a játékos között. Ez többnyire azt jelenti, hogy a megoldandó feladvány egy kisebb képernyőn jelenik meg, a játékba pedig jeladó van beszerelve, amellyel a sikeres megoldást detektálja. Ez esetleg időméréssel, hang- és fényeffektusokkal, segítségnyújtó tippek megjelenítésével társul. Példaként mutatjuk a GiiKER „Super Slide” (a nyugati világban klotzki néven ismert, kínai megnevezéssel: huarong dao) tologatósát (19. ábra), ahol a bal felső sarokban levő kis képernyő mutatja az éppen soron levő megoldandó kiinduló állást, a nyomógombokkal lehet az eszközt kezelni, a piros kockának a célba jutását pedig egy érzékelő detektálja, és amikor ez megtörténik, a képernyőn automatikusan a következő szint jelenik meg.

Ennek alapján támadt az az ötlet, hogy a negyedrendű bűvös négyzetet is interaktív játékként készítsük el, ahol a beépített elektronika automatikusan kiszámolja a sorok, oszlopok és az átlók összegét. Ehhez a 16 számozott csempébe valamilyen egyedi jeladót, a csempék elhelyezésére szolgáló tálcába pedig ugyanannyi érzékelőt kell beépíteni, az adatok feldolgozását pedig egy mikrokontroller végzi, az adatok megjelenítéséhez pedig megfelelő kijelzőt kell csatlakoztatni hozzá.

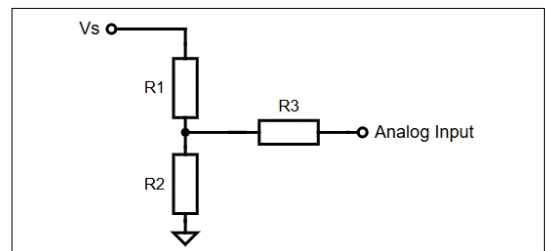
A fő probléma az érzékelés megoldása. Több megoldást is elemeztünk: a legegánsabb a behelyezett csempék RFID-rendszerrel történő azonosítása lenne, de elég nehéz feladat a 16 RFID-olvasót elhelyezni és működtetni. Egy másik elképzelés szerint szintén érintésmentes módon, kapacitív vagy induktív érzékelővel lehetne megoldani a problémát, csakhogy ezek rendszerint csak a



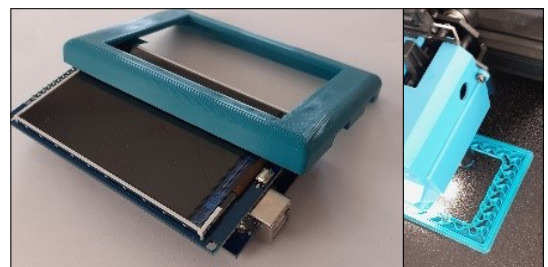
19. ábra. A GiiKER „Super Slide” interaktív logikai játéka

tárgy jelenlétét tudják érzékelni, azokat megkülönböztetni nem. Ugyanez a helyzet a Hall-érzékelőkkel is. Olcsóbb, biztonságosabb, nem túl nehezen megvalósítható megoldásként feszültségosztókat alkalmazunk (20. ábra): a tálcában kap helyet annak egyik ellenállása, amelynek a nagysága minden pozícióban ugyanakkora (R_1). A másik, csempénként különböző, egyedi ellenállás (R_2) a csempében van elhelyezve, a tálcához való csatlakoztatás pedig a felhasználó elől elrejtett tüskékkel történik. A két ellenállás csatlakozási pontját kell egy analóg mintavételező bemenetre rákötni, egy áramerősség-korlátozó ellenálláson keresztül. Ahhoz, hogy ez a bemenet ne lebegjen a behelyezett csempé hiányában, az R_1 ellenállás másik végét a tápfeszültségre kötjük, ekkor az analóg bemeneten ez a feszültség jelenik meg. Az R_2 ellenállás másik vége pedig a csatlakozón keresztül a testre kerül. A feszültségosztókhöz szükséges 16 ellenállást úgy kell megválasztani, hogy a teljes feszültségtartományon 17 jól megkülönböztethető értékünk legyen, kb. egyenletes besorítással (a tizenhetedik érték az üresen maradt pozíciókhoz szükséges).

Mikrokontrollerként egy Arduino Mega bizonyult megfelelőnek, mivel 16 analóg bemenettel rendelkezik. Ehhez közvetlenül hozzáilleszthető egy 3.5"-os, 480 × 320 pixeles LCD-képernyő, amely megjeleníthető a 16 behelyezett csempé, valamint a kiszámolt összegek (21. ábra).



20. ábra. A behelyezett csempé érzékeléséhez használt feszültségosztó



21. ábra. Arduino Mega, LCD kijelző és annak a 3D-nyomtatással készített kerete

A csempék 3D-nyomtatással készülnek, és 30×30 mm kiterjedésűek. Azokat a szintén 3D-nyomtatással elkészülő tálcán levő, téglalap alapú csonka gúla alakú tartókra kell rátűzni. A tartóban kap helyet a csatlakozó anya része, a csempének pedig a csonka gúla negatívjának megfelelő bemélyedése rejti el a két tűskét (pin). A csempe felületén van a szám, valamint annak a négyes számrendszerben vett, első és második helyi értékű számjegyének megfelelő színű jelek. (22. ábra)

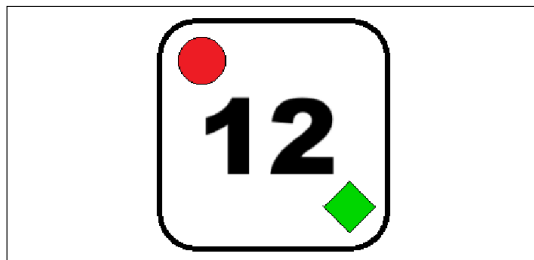
A tábla a képernyő keretével együtt egy közös test, az a teljes elektronikát tartalmazó doboz teje.

Ezzel a logikai játékkal, a szándékaink szerint első sorban a szín-bűvösnégyzetek módszerével próbálkozhat a játékos (ehhez szükségesek a csempéken levő színkódok), szórakoztató agytornaként, de akár más bűvösnégyzet-kirakási stratégiákat is ki lehet vele próbálni. Az összegek automatikus kiszámítása és kijelzése felgyorsítja a folyamatot, nem kell papírhoz és ceruzához folyamodni. Lehetővé válik olyan megkönnyített játékmódok bevezetése is, amikor a mikrokontroller előre meghatározza néhány csempe helyét, a játékos pedig csak a megmaradó csempéket kell, hogy elhelyezze.

7. Következtetések

A Rubik-kocka szabadalmának lejártával a forgatható kirakósok (twisty puzzle) újabb aranykora kezdődött: nemcsak a hagyományos bűvöskocka-verziókat gyártják és forgalmazzák, hanem igen nagyszámú más mintázatú, alakú, másként forgatható vagy más mechanizmussal megépített, forgatható kirakós látott napvilágot. Ez újraindította a Rubik-kocka kultuszát, gyűjtők, amatőr fejlesztők és versenyzők igen nagy számát vonzotta magához ez a fajta logikai játék. Erre egy egész iparágat alapoztak, a kirakósokat pedig igen sokan forgalmazzák. A legnépszerűbbek a változatos és bőséges kínálatú online üzletek. Ezzel párhuzamosan, a forgalmazott termékek palettájának bővítéseként, egyéb logikai játékok is a forgalomba kerültek (a Rubik-kocka-forgalmazók egy non-twisty kategóriába sorolva árusítják ezeket), így a negyedrendű bűvös négyzet is.

Mivel a bűvös négyzet kirakása egy aránylag nehezebben megoldható feladat, interaktív játékként gondoltuk kivitelezni. Egy elektronikusan áramkör automatikusan kiszámolja a behelyezett számok összegét, ezzel felgyorsítja a megoldás menetét. Mivel az elektronika egy mikrokontrol-



22. ábra. Az egyik csempe

ler köré épül, akár az is lehetővé válik, hogy a megoldást a képernyőn dolgozzuk ki, a csempéket pedig csak a megoldás megtalálása után helyezzük be.

A játék logikája a szín-bűvösnégyzetekre alapul. Különleges latin négyzetekről van szó, ahol az ismétlődés az átlók mentén sem fordulhat elő. Ekként van megalkotva a csempék jelölése, valamint a behelyezett csempéknek a képernyőn látható kijelzése. Ez azonban nem zárja ki másfajta, nem a szín-bűvösnégyzetekre alapozó megoldási eljárások kipróbálását.

A cikkben a szín-bűvösnégyzetekre alapozó eljárást egy magasabb rendű négyzetre is kiterjesztettük, annak interaktív játékként történő megvalósításával azonban nem foglalkoztunk.

Következésképpen elmondhatjuk, hogy egy új, egyszerűen átlátható algoritmust fejlesztettünk ki a bűvös négyzetek felépítésére (amellyel csak bizonyos típusú négyzeteket lehet létrehozni), az ötlet tovább gondolásával pedig egy eddig nem létező, új interaktív játékot hoztunk létre, a logikai játékokat kedvelők öröme.

Szakirodalmi hivatkozások

Bűvös négyzetekkel számos cikk foglalkozik, amelyek az interneten elérhetők. A legjobban a Wikipédia foglalja össze a velük kapcsolatos tudást. Ha könyvet szeretnénk találni e témakörben, W. S. Andrewstól a *Magic Squares and Cubes* (1917) címen közzétett műnél újabbat az alább hivatkozotton kívül nem találunk. Andrews igen részletes könyve az interneten olvasható:

https://djm.cc/library/Magic_Squares_Cubes_Andrews_edited.pdf.

Mi azonban csak egy, kimondottan a bűvös négyzetekkel foglalkozó műre hivatkozunk, mivel abban minden fontos információ megtalálható:

[1] Berger György: *Bűvös négyzetek*. Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1986.