



NÉGY SZABADSÁGFOKÚ PÁRHUZAMOS ROBOT GEOMETRIAI ELEMZÉSE

GEOMETRICAL ANALYSIS OF A 4-DOF PARALLEL ROBOT

Kádár Alex-Jenő,¹ Forgó Zoltán²

¹ Sapiientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Marosvásárhelyi Kar, Gépészmérnöki Tanszék, Marosvásárhely, Románia, kadar.alex.jeno@student.ms.sapiientia.ro

² Sapiientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Marosvásárhelyi Kar, Gépészmérnöki Tanszék, Marosvásárhely, Románia, zforgo@ms.sapiientia.ro

Abstract

The thesis presents the development of the geometric and kinematic model of a 4-DOF parallel robot. The mechanism consists of two symmetric closed kinematic chains and provides three translational and one rotational degree of freedom through four actuated joints. The model was established using the Denavit–Hartenberg parametrization method, enabling the determination of the closed-form formulation of the forward kinematics. The inverse kinematic model was derived geometrically by exploiting the structural symmetry of the mechanism. The mathematical model was implemented in MATLAB, including a graphical user interface and a simple trajectory-tracking function. The developed system provides a basis for further workspace and dynamic analyses.

Keywords: *parallel robot, kinematic modelling, Denavit–Hartenberg parameterization, inverse kinematics, MATLAB application.*

Összefoglalás

A dolgozat egy négy szabadságfokú párhuzamos robot geometriai és kinematikai modelljének kidolgozását mutatja be. A két szimmetrikus, zárt kinematikai láncból felépülő mechanizmus négy aktív csuklóval biztosít három transzlációs és egy rotációs szabadságfokot. A modell felállítása a Denavit–Hartenberg-paraméterezés alkalmazásával történt, amely lehetővé tette a direkt kinematika zárt alakú felírását. Az inverz kinematikai modell geometriai úton, a szerkezeti szimmetria kihasználásával került megoldásra. A matematikai modell implementálása MATLAB-környezetben valósult meg, grafikus felhasználói felülettel és egyszerű pályakövetési funkcióval. A kidolgozott rendszer alapot biztosít további munkatér- és dinamikai vizsgálatokhoz.

Kulcsszavak: *párhuzamos robot, kinematikai modellezés, Denavit–Hartenberg-paraméterezés, inverz kinematika, MATLAB-applikáció.*

1. Bevezetés

A párhuzamos kinematikájú robotok az elmúlt évtizedekben a robotika kiemelt kutatási területévé váltak nagy merevségük, kedvező teherbírás/tömeg arányuk és nagy pozicionálási pontosságuk miatt [1]. A soros robotokkal szemben – amelyek ipari alkalmazásban jobban elterjedtek [2] – a párhuzamos szerkezetek esetében a munkapont több, egymással párhuzamosan kapcsolt kinematikai láncon keresztül csatlakozik az alaphoz. Ez a

struktúra csökkenti a mozgó tömeget és javítja a dinamikai tulajdonságokat [3].

A párhuzamos manipulátorok egyik legismertebb példája a Stewart-platform, amelyet Stewart irt le repülésszimulációs alkalmazásokra [4]. A teljes hat szabadságfokú (6-DOF) rendszerekkel szemben számos ipari és kutatási alkalmazásban elegendő csökkentett szabadságfokú konfiguráció alkalmazása. Ezt igazolja a Nemzetközi Robotikai Szövetség, a Balluff vállalat hivatkozása alapján [2], amely szerint az iparban a második legelter-

jedtebb robottípus a négy szabadságfokú SCARA. Négy szabadságfokú (4-DOF) mechanizmusok esetén tipikusan három transzláció és egy rotáció valósul meg. Az ilyen rendszerek kedvező kompromisszumot kínálnak szerkezeti egyszerűség és funkcionalitás között [3].

A párhuzamos robotok tervezésének alapja a pontos geometriai és kinematikai modell. A kinematikai analízis során megkülönböztetjük a direkt (előre) és az inverz kinematikai modellezést. Párhuzamos manipulátorok esetében az inverz kinematika gyakran zárt alakban meghatározható, míg a direkt kinematika rendszerint nemlineáris egyenletrendszer megoldását igényli [1].

A kinematikai láncok szisztematikus geometriai leírására széles körben alkalmazott módszer a Denavit–Hartenberg-féle paraméterezés [5]. A jelen munka során a vizsgált négy szabadságfokú párhuzamos robot Denavit–Hartenberg-paraméterei kerültek meghatározásra, majd a geometriai összefüggések alapján zárt alakú inverz kinematikai egyenletek kerültek levezetésre.

A modell implementálása MATLAB-környezetben történt, amely hatékony eszközt biztosít mátrixműveletek, szimbolikus számítások és térbeli vizualizáció elvégzésére [6]. A fejlesztett szimulációs alkalmazás lehetővé teszi a robot konfigurációjának térbeli megjelenítését, mind a direkt, mind az indirekt kinematikai modell alkalmazásával.

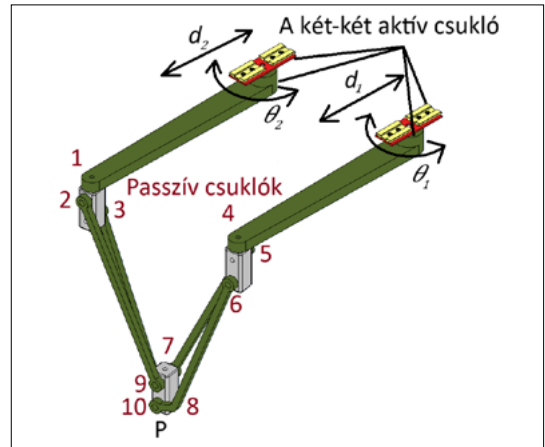
A dolgozat célja a vizsgált négy szabadságfokú párhuzamos robot geometriai modelljének meghatározása és szimulálása MATLAB-alapú applikáció létrehozásával.

2. Javasolt struktúra

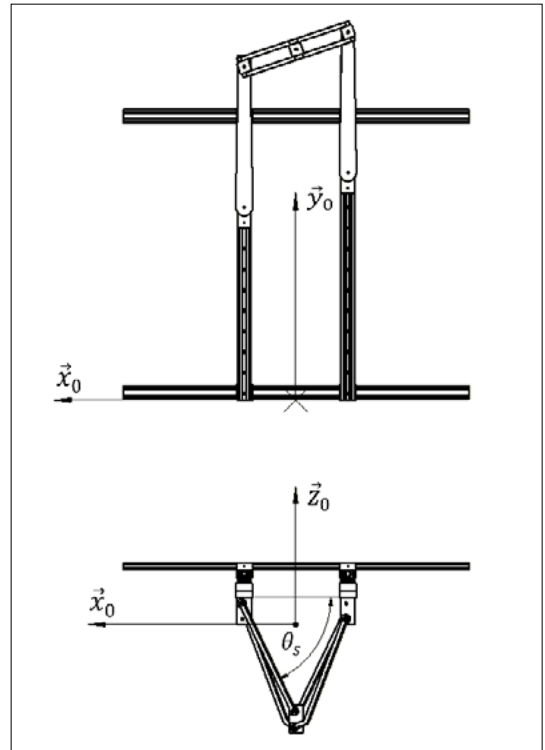
A robot topológiája négy szabadságfokú, ennek megfelelően négy aktív csuklóval rendelkezik: két transzlációs és két rotációs csuklóval. A mechanizmus két, egymáshoz kapcsolódó kinematikai láncból épül fel, amelyek együttesen tíz – láncenként öt – passzív csuklót tartalmaznak. A rendszer szerkezeti felépítését az 1. ábra szemlélteti.

A kinematikai modell meghatározásának első lépése a világ-koordináta-rendszer definiálása, amely a teljes mechanikai rendszer rögzített, vonatkoztatási rendszerét adja. Ebben a globális referenciarendszerben rögzítjük a robot bázisának helyzetét és orientációját, valamint ehhez viszonyítva definiáljuk az egyes csuklókhöz rendelt lokális koordináta-rendszereket [3]. A robotmechanizmusok ilyen módon történő leírása a merevtest-kinematika általánosan elfogadott formalizmusán alapul [7].

A világ-koordináta-rendszert a 2. ábrán szemléltetett módon határoztuk meg. Az $\vec{y}_0$ tengely irányát a lineáris (transzlációs) csuklók mozgásirányával megegyezően választottuk meg, míg a $\vec{z}_0$ tengely függőlegesen felfelé mutat. Az $\vec{x}_0$ tengelyt úgy definiáltuk, hogy az tegyen eleget a jobb sodrású koordináta-rendszer követelményeinek [7].



1. ábra. Robotkar-topológia



2. ábra. A világ-koordináta-rendszer helyzete és orientációja

A koordináta-rendszer origójának elhelyezése a geometriai szimmetriát és a számítási egyszerűséget figyelembe véve történik: az y tengely a két lineáris vezetősin középvonalába került, míg az origó a koordinátája a robot munkapontja által elméletileg elérhető legmagasabb pontjához igazodik. Ez a választás megkönnyíti a kinematikai egyenletek felírását és a munkatér értelmezését [3].

2.1. Direkt kinematika

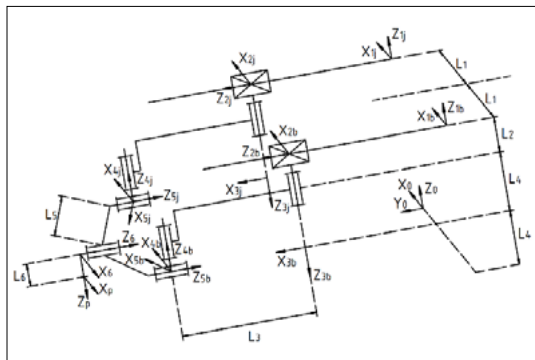
A direkt kinematika meghatározására a szakirodalomban legelterjedtebben alkalmazott módszer a Denavit–Hartenberg-féle parametrizáció, amely szisztematikus és strukturált eljárást biztosít soros kinematikai láncok modellezésére [5]. A módszert Jacques Denavit és Richard S. Hartenberg vezették be, és azóta a robotikai kinematika alapvető eszközévé vált.

A modell felírásának első lépéseként minden csuklóhoz lokális koordináta-rendszert rendelünk a Denavit–Hartenberg-szabályoknak megfelelően [5]. A szerkezet topológiai elemzése alapján megfigyelhető, hogy egyes passzív csuklópárok – amelyek között relatív szabadságfok nem jelenik meg – a modellezés szempontjából egyetlen ekvivalens csuklóként kezelhetők. Ez az összevonas csökkenti a modell paramétereinek számát és egyszerűsíti az analitikus leírást anélkül, hogy a kinematikai viselkedést befolyásolná [3].

A két kinematikai láncot a továbbiakban j , illetve b index különbözteti meg attól függően, hogy a világ-koordináta-rendszer Y_0 tengelyének pozitív irányába tekintve a jobb vagy bal oldalon helyezkednek el. Az ilyen jelölési konvenciók alkalmazása elősegíti a szimmetrikus mechanizmusok tárgyalását.

A szomszédos csuklókhöz rendelt koordináta-rendszerek közötti térbeli kapcsolat homogén transzformációs mátrixokkal írható le, amelyek egységesen tartalmazzák a merevtest-eltolás és -elforgatás komponenseit [7]. A teljes direkt kinematikai leképezést a résztranszformációk egymás utáni szorzata határozza meg. A koordináta-rendszerek konkrét pozícióját és orientációját a 3. ábra szemlélteti, a translációs Denavit–Hartenberg-paraméterekkel együtt.

Mivel a világ-koordináta-rendszer origója és az első – lineáris – csuklók tengelyei nem azonos magasságban helyezkednek el, a Denavit–Hartenberg-paraméterek konzisztens meghatározásához egy segéd-koordináta-rendszer bevezetése szükséges [5, 7]. Ez a köztes rendszer biztosítja, hogy a parametrizáció megfelelően a módszer for-



3. ábra. A robot Denavit–Hartenberg-koordinátáinak ábrázolása

mai követelményeinek, és a transzformációs lánc egységes alakban írható fel.

A bal oldali kinematikai lánc Denavit–Hartenberg-paramétereit az 1. táblázat, míg a jobb oldali lánc paramétereit a 2. táblázat tartalmazza.

1. táblázat. A bal oldali kinematikai lánc Denavit–Hartenberg-paramétereit

DH	a_{i-1}	α_{i-1}	θ_i	d_i
1.	0	$-L_1$	0	$L_2 + 2L_4$
2.	$-\pi/2$	0	0	d_1
3.	$-\pi/2$	0	$-\theta_1$	$L_2 + L_4$
4.	π	L_3	$-\theta_1 + \theta_p$	0
5.	$\pi/2$	0	$-\theta_s$	0
6.	0	L_5	$\theta_s + \pi$	0
TCP	$-\pi/2$	0	0	L_6

2. táblázat. A jobb oldali kinematikai lánc Denavit–Hartenberg-paramétereit

DH	a_{i-1}	α_{i-1}	θ_i	d_i
1.	0	L_1	0	$L_2 + 2L_4$
2.	$-\pi/2$	0	0	d_2
3.	$-\pi/2$	0	$-\theta_2$	$L_2 + L_4$
4.	π	L_3	$-\theta_2 + \theta_p$	0
5.	$\pi/2$	0	$\theta_s + \pi$	0
6.	0	L_5	$-\theta_s$	0
TCP	$-\pi/2$	0	0	L_6

A táblázatok az i -edik koordináta-rendszerhez rendelt négy klasszikus Denavit–Hartenberg-paramétert adják meg [5]:

- a_{i-1} a z_{i-1} és z_i tengelyek közötti szög az x_{i-1} tengely körül mérve;
- α_{i-1} az $\{i-1\}$ és $\{i\}$ rendszerek origói közötti távolság az x_{i-1} tengely mentén;

- θ_i az x_{i-1} és x_i tengelyek közötti szög a z_i tengely körül;
- míg d_i az x_{i-1} és x_i tengelyek közötti eltolás a z_i tengely irányában.

E paraméterek egyértelműen meghatározzák a szomszédos koordinátarendszerek közötti homogén transzformációs mátrixokat, és ezáltal a teljes kinematikai lánc direkt leképezését [3, 7].

A táblázatokban szereplő θ_1 és θ_2 az aktív, vezérelt rotációs csuklók szögeit, míg a d_1 és d_2 az aktív transzlációs csuklók elmozdulásaik nagyságát jelölik. A koordinátarendszerek meghatározásához a passzív csuklók elfordulási szögeit is bevezettük θ_p és θ_s jelöléssel. A θ_p paraméter egyben a munkapont z_0 tengely körüli elfordulásával is ekvivalens, így a rendszer negyedik szabadságfokát reprezentálja.

A passzív csuklósögek nem független változók, hanem a zárt kinematikai lánc geometriai kényszereiből adódóan az aktív csuklókoordináták függvényeként határozhatók meg [1, 4]. Értéküket az (1)–(4) egyenletekben megadott geometriai összefüggések alapján számítottuk, amelyek a lánc síkbeli vetületében felírt trigonometrikus relációkból vezethetők le.

$$\theta_p = \arctan\left(\frac{D_{jb_4}^{y_0}}{D_{jb_4}^{x_0}}\right) \quad (1)$$

$$\theta_s = \arctan\left(\frac{\sqrt{4L_5^2 - D_{jb_4}^{x_0} - D_{jb_4}^{y_0}}}{\sqrt{D_{jb_4}^{x_0} + D_{jb_4}^{y_0}}}\right) \quad (2)$$

$$D_{jb_4}^{x_0} = 2L_1 + L_3(\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)) \quad (3)$$

$$D_{jb_4}^{y_0} = d_2 - d_1 + L_3(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \quad (4)$$

A fenti paraméterek és kényszeregyenletek együttesen lehetővé teszik a rendszer direkt kinematikai leképezésének teljes meghatározását a homogén transzformációk szorzataként. A szorzatok eredményét az (5)–(7) egyenletek szemléltetik, az $\vec{r}$ meghatározza a munkapont pozícióját, míg az R mátrix az orientációját a világ-koordinátarendszerben.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} L_1 + L_3 \cos(\theta_2) - L_5 \cos(\theta_p) \cos(\theta_s) \\ d_2 + L_3 \sin(\theta_2) - L_5 \sin(\theta_p) \cos(\theta_s) \\ L_4 - L_6 - L_5 \sin(\theta_s) \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta_p) & -\sin(\theta_p) & 0 \\ -\sin(\theta_p) & \cos(\theta_p) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$Th_0^p = \begin{pmatrix} R_{3 \times 3} & \vec{r}_{3 \times 1} \\ \vec{0}_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

2.2. Inverz kinematika

Az inverz geometriai modell a direkt leképezés inverzének meghatározására irányul, azaz adott a munkapont pozíciója és orientációja, melyekből meg kell számítani a szükséges csuklólátzókat. Az inverz modell általánosságban nemlineáris egyenletrendszert jelent, amely több megoldást is eredményezhet, illetve bizonyos konfigurációkban szingularitások léphetnek fel. A modellt a szerkezet topológiai sajátosságait figyelembe véve határoztuk meg.

Az inverz kinematikai modell megalkotásához kiszámítottuk a 3. ábrán szemléltetett koordinátarendszerek pozícióját a világ-koordinátarendszerben. Az első rendszer a 6., mely csak egy z tengely menti eltolással rendelkezik a P, vagyis a munkapont rendszeréhez képest. A bal és jobb oldali 5. koordinátarendszerek z tengely szerinti magassága ismert (L_4), míg az x és y koordinátájuk meghatározásához ki kellett számolnunk a jobb, illetve bal oldali 5-ös rendszerek távolságának a felét. Tudva, hogy a munkapont mindig egy vonalban lesz ezzel a felezőponttal, így ismerjük az egyik befogót ($z_5 - z_6$) és az átfogót (L_5) is. A 4-es rendszerek origója egybeesik az 5-ösök origójával, így azokat nem szükséges kiszámolni.

$$D_{5P}^{x_4} = \sqrt{L_5^2 - (L_6 - L_4 + z_p)^2} \quad (8)$$

$$Ob_5 = \begin{pmatrix} x_p + \cos(\theta_p + \pi) D_{5P}^{x_4} \\ y_p + \sin(\theta_p + \pi) D_{5P}^{x_4} \\ L_4 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$Oj_5 = \begin{pmatrix} x_p + \cos(\theta_p) D_{5P}^{x_4} \\ y_p + \sin(\theta_p) D_{5P}^{x_4} \\ L_4 \end{pmatrix} \quad (10)$$

A 3-as koordinátarendszerek kiszámításához meghatározunk geometriai egyenletekkel egy-egy kört úgy, hogy az 5-ös rendszerek legyenek a körök középpontjai, és L_3 nagyságú legyen a sugaruk. Ezeket a köröket metszik a lineáris csuklók által meghatározott egyenesek ($x = \pm L_1$), és ezek a metszéspontok határozzák meg a 3-as koordinátarendszerek origójának helyzetét. Az origó pozícióját a világ-koordinátarendszerben a (11)–(14) egyenletek szemléltetik.

$$d_1 = y_{b_3} = y_{b_5} - \sqrt{L_3^2 - (-L_1 - x_{b_5})^2} \quad (11)$$

$$d_2 = y_{j_3} = y_{j_5} - \sqrt{L_3^2 - (L_1 - x_{j_5})^2} \quad (12)$$

$$Ob_3 = \begin{pmatrix} -L_1 \\ y_{b_3} \\ L_4 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$Oj_3 = \begin{pmatrix} L_1 \\ y_{j_3} \\ L_4 \end{pmatrix} \quad (14)$$

A csuklóparaméterek meghatározására elégséges a bal és jobb oldali 5., illetve 3. rendszer pozíciója, melyek y koordinátája megfelel a d_1 , illetve a d_2 lineáris csuklóparamétereknek. A θ_1 és θ_2 rotációs csuklóparaméterek kiszámítását a (15) és (16) egyenlet szemlélteti.

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{y_{b_5} - y_{b_3}}{x_{b_5} - x_{b_3}}\right) \quad (15)$$

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{y_{j_5} - y_{j_3}}{x_{j_5} - x_{j_3}}\right) \quad (16)$$

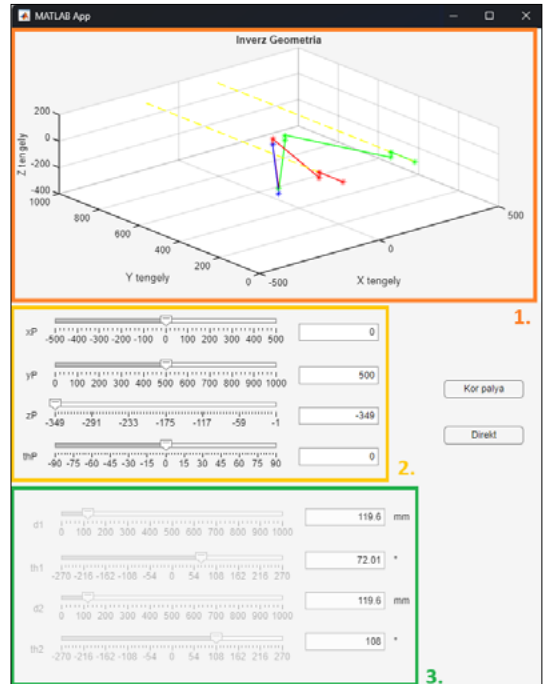
A további koordinátarendszerek pozíciójának meghatározása egyszerű translációkkal valósítható meg. Ezek kiszámítása csak a modell grafikus ábrázolása miatt szükséges.

3. Matlab-implementáció

A modellek felírásához és a szükséges matematikai műveletek elvégzéséhez a Matlab programozási környezetet alkalmaztuk, amely mátrixalapú számítások hatékony végrehajtására alkalmas [6]. A homogén transzformációs mátrixok kezelése, valamint a nemlineáris egyenletek szimbolikus feldolgozása jelentősen megkönnyítette a kinematikai összefüggések levezetését. Az összefüggések eredményét a beépített 3 dimenziós grafikus megjelenítés (plot3) ábrázolja. A modelleket és azok ábrázolását egy Matlab-applikációban implementáltuk, melynek grafikus kezelői felülete (GUI) a 4. ábrán látható.

Az 1-es számmal jelölt panel a kinematikai modellek grafikus megjelenítését tartalmazza. A 2-es és 3-as jelölésű kezelőfelületek rendre az inverz, illetve a direkt modell bemeneti paramétereinek beállítására szolgálnak. A 4. ábrán a Direkt felirattal ellátott nyomógomb lehetőséget biztosít a direkt és inverz kinematikai mód közötti váltásra; üzemmódváltás esetén a gomb felirata ennek megfelelően dinamikus módon módosul, jelen esetben Inverzre.

A felület kiegészült egy kezdetleges pályakövető algoritmusával is, amely a Körpálya gomb megnyomásával indítható. A funkció működése során a rendszer egy körpálya pontjait generálja, majd azokat egymást követően az inverz kinematikai modell segítségével kiszámított csuklóváltozó-



4. ábra. Az applikáció kezelői felülete

kal követi le. A robot mozgását az 1-es panelen grafikus formában jeleníti meg.

Következtetések

A dolgozat célja egy négy szabadságfokú párhuzamos robot geometriai és kinematikai modelljének meghatározása, valamint annak MATLAB-alapú szimulációs megvalósítása volt. A vizsgált mechanizmus két szimmetrikus kinematikai láncból áll, négy aktív csuklóval, amelyek a munkapont háromtranszlációs és egyrotációs szabadságfokát biztosítják.

A modellalkotás során a világ-koordinátarendszer megfelelő megválasztásával és a Denavit–Hartenberg-paraméterezés alkalmazásával meghatároztuk a direkt kinematikai leképezést. Az inverz kinematikai modellt geometriai úton vezettük le, amely lehetővé teszi az aktív csuklóparaméterek analitikus meghatározását az előírt végponti helyzet és orientáció alapján.

A matematikai modellre építve grafikus felhasználói felülettel ellátott alkalmazás készült, amely alkalmas a direkt és inverz kinematika vizsgálatára, valamint egyszerű pályakövetési feladatok szimulációjára. A kidolgozott modell megfelelő alapot biztosít további munkatér-, szingularitási és dinamikai vizsgálatokhoz.

Szakirodalmi hivatkozások

- [1] Merlet J.-P.: *Structural Synthesis and Architectures*. In: *Parallel Robots*. (Szerk.: Merlet J.-P.). Springer Netherlands, Dordrecht, 2006. 19–94.
- [2] The 5 Most Common Types of Fixed Industrial Robots | Balluff. (letöltve: 2025. október 18). <https://www.balluff.com/en-us/blog/the-5-most-common-types-of-fixed-industrial-robots>
- [3] Siciliano B., Sciavicco L., Villani L., Oriolo G.: *Visual Servoing*. In: *Robotics: Modelling, Planning and Control*. (Szerk.: Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., Oriolo, G.). Springer, London, 2009. 407–467.
- [4] Stewart D.: *A Platform with Six Degrees of Freedom*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 180/1. (1965) 371–386. https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1965_180_029_02
- [5] Denavit J., Hartenberg R. S.: *A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices*. Journal of Applied Mechanics, 22/2. (1955) 215–221. <https://doi.org/10.1115/1.4011045>
- [6] Matlab 7. Getting Started Guide. (letöltve: 2025. január 18). <https://people.math.wisc.edu/~sgurevich/Int-to-Matlab.pdf>
- [7] Murray, R. M., Li, Z., Sastry, S. S.: *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC press, 2017.