



LIGHTS OUT – LOGIKAI JÁTÉK

LIGHTS OUT – LOGIC GAME

Kakucs András,¹ Harangus Katalin,² Fogarasi Zoltán³

¹ Sapientia-EMTE, Gépészmérnöki Tanszék, Marosvásárhely, Románia, kakucs2@ms.sapientia.ro

² Sapientia-EMTE, Tanárképző Intézet, Marosvásárhely, Románia, katalin@ms.sapientia.ro

³ Sapientia-EMTE, Marosvásárhelyi Kar, Mechatronika IV, fogarasi.zoltan@student.ms.sapientia.ro

Abstract

Lights Out is a logic puzzle game that was distributed in various versions by a company called Tiger Electronics between 1995 and 1998. Later, the production was taken over by a larger company, Hasbro, and the last version was released about two decades ago. The mathematical foundations of the game have been studied by several researchers. We aimed to extend the game by exploring the possibilities of manual solving, and to generalize and expand its mathematical model. To this end, we first developed a computer-based version, which made it easier to implement and test the mathematical background of the game in practice. Our future goal is to build a physical prototype constructed from 3D-printed components and controlled by a microcontroller, in order to test the gameplay experience of this new version.

Keywords: *Lights Out, logic game, system of linear equations, finite field $GF(n)$.*

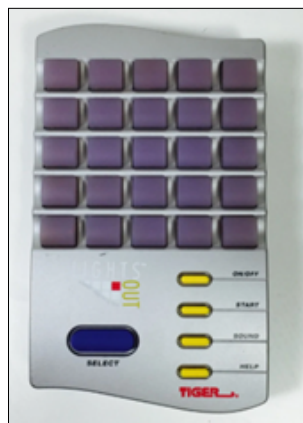
Összefoglalás

A Lights Out egy logikai játék, amelyet különböző változatokban a Tiger Electronics nevű cég forgalmazott 1995 és 1998 között. Később a gyártást egy nagyobb cég, a Hasbro vette át, kb. két évtizede adták ki az utolsó változatot. A játék matematikai alapjaival több kutató is foglalkozott. Úgy gondoltuk, hogy a játékot kibővítve megvizsgáljuk a kézi megoldás lehetőségeit, a matematikai modelljét pedig kibővítjük és általánossá tesszük. Ennek érdekében először egy számítógépes változatot hoztunk létre, amelyen könnyebb volt a játék matematikai hátterét kipróbálni és tesztelni. Későbbi célunk egy 3D nyomtatott alkatrészekből felépített, mikrokontroller-alapú fizikai prototípus elkészítése, amellyel az új változat játékelményét szeretnénk kipróbálni.

Kulcsszavak: *Lights Out, logikai játék, lineáris egyenletrendszer, $GF(n)$ véges test.*

1. Bevezető

A Lights Out (fényeket ki!) egy elektronikus logikai játék, amelyet ezen a néven elsőként a Tiger Electronics nevű amerikai cég adott ki, 1995-ben (1. ábra). Ez egy 5×5 -ös táblán, négyzetrács formájában elhelyezett nyomógombokból áll, amelyek vagy világítanak, vagy nem. Ha egy gombot megnyomunk, akkor a fényének állapota megváltozik: ha addig világított, akkor kialszik, és fordítva. Azonban nemcsak a megnyomott gomb, hanem a felette, az alatta, és annak a két oldalán, tehát a kereszthalakzatban elhelyezkedő szomszédos gombok állapota is megváltozik. A játék kezdetén néhány fény világít, a cél pedig az összes világító gomb kioltása.



1. ábra. Az 1995-ben kiadott Lights Out

A későbbi kiadásokban a játékot tovább fejlesztették. Így jelent meg a 4×4 -es Mini Lights Out, ahol bevezették a végtelenített (perem nélküli) kiosztást, ahol a sor vége a sor elején, az oszlop alja meg az oszlop tetején folytatódik. Ezt úgy is lehet elképzelni, hogy a játék egy gyűrű (tórusz) felületén folyik, ahol mindkét irányban körbe lehet menni.

A Lights Out 2000-en, amit már a Hasbro adott ki, játszható egy olyan változat is, ahol a fények háromállapotúak: a világító gombok zöldek, a leoltott és a zölden világító között pedig van egy pirosan világító köztes állapot is.

Később megjelent egy 6×6 -os verzió is, a Lights Out Deluxe, amelyen a gombnyomások X-alakzatú hatását is bevezették: a megnyomott gomb körül az átlósan elhelyezkedő négy szomszédjának változik az állapota.

A játék nem előzmények nélküli: Dávid Gábor, Mérő László és Szatmári Ferenc kb. a bűvös kocka megjelenése idején fejlesztett ki egy, az 1995-ös Lights Outtal lényegében azonos játékot, amelyet 1982-ben szabadalmaztattak, egy évvel később pedig XL 25 néven a Vulcan Electronics nevű cég kezdett gyártani Hong-Kongban (2. ábra; a kép az internetről származik). Az akkori műszaki körülmények miatt a magyarországi gyártása nem volt lehetséges, de ott is forgalmazták. Ez a játék nemcsak a hatások kereszt formájú elrendezésével működött, hanem volt egy lólépésszerű változat is.

A 3. ábrán a piros cella a megnyomott gombot, a sárgák pedig az érintett szomszédokat mutatják, az említett három elrendezésben.

A Lights Outnak van egy még korábbi előzménye is, amely az első mikrokontrolleres játékok egyike volt: a Parker Brothers nevű amerikai cég által 1978-ban kiadott Merlin, amelyen egyebek között egy Lights Out-szerű játékot is lehetett játszani egy 3×3 -as táblán. Ez a fénykép is (4. ábra) az internetről származik.

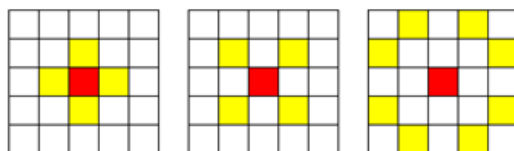
2. A tanulmány célja

A játék működési elvének tanulmányozása során született meg a játszható változatok kiterjesztésének az ötlete. A gombnyomások által befolyásolt fények mintázatát, az állapotok számát és a tábla méreteit elvileg tetszőlegesen lehet változtatni, így a verziókat végtelen nagy számban lehetne előállítani. Az egyik kitűzött célunk az volt, hogy a játékot kibővítve megvizsgáljuk a kézi megoldás lehetőségeit.

A játék matematikai alapjaival több kutató is foglalkozott. Ezek tanulmányozása után úgy gon-



2. ábra. Az 1982-ben kiadott XL 25



3. ábra. A gombnyomással átváltott fények



4. ábra. Az 1978-ban kiadott Merlin

doltuk, hogy a játék gépi megoldásának matematikai modelljét is kibővítjük és általánosabbá tesszük.

Mivel technikailag nehéz lenne nagyobb kiosztásokat kézben tartható játékként megvalósítani, a kézi megoldás esetében a legnagyobb tanulmányozott méret a 6×6 -os maradt, azonban a fények mintázatának új változatait vezettük be. Mi több, a játékos egy 3×3 -as mezőben tetszőleges mintázatot hozhat létre, amellyel majd a játék végbe-

3. A megvalósítás

A játék szoftverének a fejlesztése és tesztelése egy PC-n egyszerűbb, mintha azt rögtön egy mikrokontrolleren valósítanánk meg: így keletkezett az a program, amelynek a felhasználói felületét az **5. ábrán** láthatjuk. A megírt program a kereskedelemben kapható játékok funkcióin felül lehetővé teszi egy adott állapot rögzítését, ahova egy gombnyomással vissza lehet térni, amikor onnan újra szeretnénk kezdeni a játékot. Nagyobb szabadságot nyújt a játszani kívánt kiosztások beállításában, alkalmas az optimális (a legrövidebb) megoldások kiszámítására és azok megjelenítésére, valamint a megoldható konfigurációk megtalálására is. Ez utóbbi a megoldási eljárások kidolgozásában volt fontos segédeszköz.

A játék fizikai megvalósítása még folyamatban van. Az egy ESP32 mikrokontrollerre fog alapozni. A szoftveres verzió felhasználó felületén megjelenő kezelő elemeket nyomógombok fogják helyettesíteni. A világító gombok 3D-nyomtatással készülnek, bennük ws2812b RGB LED-ek fognak világítani. A játék beállításai egy kis méretű LCD-képernyőn fognak megjelenni.

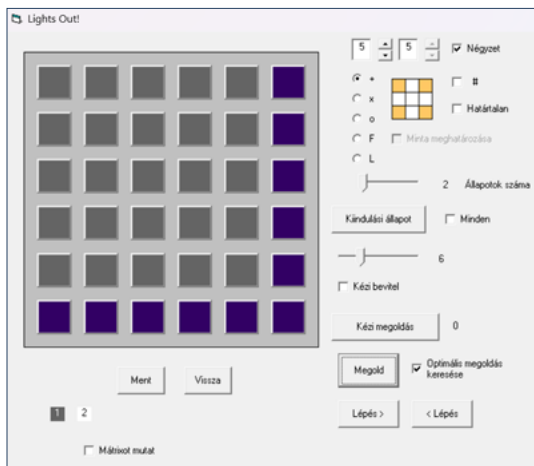
4. A tanulmányozott esetek

A gombnyomások által befolyásolt fények szimmetrikus mintázatának három alaptípusára koncentráltunk: a klasszikusnak számító kereszt (+), a kevésbé ismert X (×), valamint a saját fejlesztésű négyzet (□). Mind a három lehet lyukas is (#), ami szintén saját fejlesztés: ilyenkor a megnyomott gomb állapotában nincs változás, tehát hiányzik a mintázat közepe (**6. ábra**).

Ugyanakkor bármely verzió lehet végtelenített (no border, ∞), ami azt jelenti, hogy a szélső sorokban és oszlopokban, sarkokban levő gombok megnyomásakor a mintázatnak a gombok négyszögén kívül eső része az ellentétes oldalon jelenik meg. A **7. ábrán** ezek a pirossal jelölt cellák, a fények kereszt alakú elrendezésére példázva.

Ezek mellett felélesztettük a háromállapotú fényekkel megoldott változatot is, amelynek az elvét még több állapotú fényekre is kiterjesztettük, valamint a lólépéses változatot is. Kísérleti konfigurációként, amelyet inkább a játékot leíró matematikai sajátosságok részletesebb megértéséhez és a program tesztelésére vezettünk be, a fények nem szimmetrikus, pl. háromszögű alakzatban való elhelyezését is megvizsgáltuk.

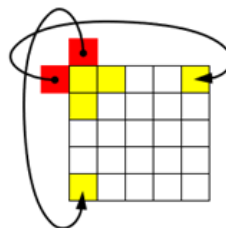
A gombok négyszöge (a tábla) lehet négyzet alakú, amikor a sorok és az oszlopok száma azonos, vagy pedig téglalap. Pl. az 5×6-os kiosztásban a



5. ábra. A számítógépes játék felhasználói felülete



6. ábra. Egy gombnyomás által befolyásolt fények mintázatai



7. ábra. A gombnyomás által befolyásolt fények kereszt alakú mintázatának kiterjedése a végtelenített változatban

30 gomb 5 sorban és 6 oszlopban, a 6×5-ös verzióban pedig ugyanannyi gomb 6 sorban és 5 oszlopban található: ezek egymás 90 fokkal elforgatott verziói. Azonban ha ragaszkodunk a szokásos fentről lefelé történő haladással, akkor a megoldásuk menete különbözni fog.

A játéknak van egy „fordított” módja is, amikor a cél az előbbi ellentéte: az összes fényt fel kell gyújtani. Ezzel kapcsolatban tehetünk egy észrevételt: a Lights Out megoldásával foglalkozó irományokban gyakran olvasható, hogy az a kiindulási állapot, amikor minden fény ég, mindig megoldható. Ebből levonják azt a következtetést, hogy bármely, az összes fény kioltásának szempontjából megnyerhető állapotból kiindulva fel tudjuk kapcsolni az összes fényt. Ez az észrevé-

tel eredetileg a fények kereszt alakú elrendezésére volt megállapítva. A vizsgálataink alapján a gombnyomások hatásának felsorolt megoldásaiban a lyukas verziókban ez a kijelentés nem minden esetben igaz. Másképpen fogalmazva: ha a fények kioltása szempontjából megoldható egy állapot, akkor azok felgyújtása nem minden esetben jár sikerrel.

Ez az észrevétel a megoldható kiindulási helyzetek előállításában is fontos. Ha azt akarjuk, hogy a játék megnyerhető legyen, akkor az eredeti, minden fényt leoltani kívánó változatban a kiindulási állapotot úgy állíthatjuk elő, hogy egy teljesen sötét táblán megnyomunk egy pár gombot: ez fel fog gyújtani néhány fényt. A fordított, minden fényt felgyújtani kívánt módban ugyanezt a teljesen kivilágított táblán kell megtennünk, ahol a kezdetben minden fény világít: a gombnyomásokkal le fogunk oltani belőlük egy párat. Mindkét állapot biztosan megoldható lesz, mert ugyanazoknak a gomboknak az újbóli megnyomása vissza fogja állítani a teljesen sötét, illetve a teljesen kivilágított táblát.

A játék mikrokontrollerén futó program véletlenszerűen dönti el, hogy mely gombok megnyomásával álljon elő a megoldható kiinduló állapot, a gombnyomások számát pedig a játékos állítja be.

A lehetséges kiinduló helyzetek száma a gombok számától és a fények állapotának a számától függ: ha a gombok száma g , akkor n állapotú fények esetében ez a szám ng . Ez a szám a kétállapotú fények tanulmányozott eseteiben 2 (1×1 -es kiosztás) és 236 (6×6) között van: ez utóbbi egy nagyon nagy szám: 68 719 476 736.

Sok esetben nincs bármilyen tetszőleges kiindulási állapotra megoldás, vagyis a fényeknek létezhet olyan konfigurációja is, amely esetben a játék nem nyerhető meg. A kézzel bevitt kiindulási állapotok esetében érdemes szem előtt tartani ezt.

5. A kézi megoldás lehetőségei

A Rubik-kockánál tapasztalhatjuk, hogy ha azt csak két-három forgatással kevertük össze, akkor aránylag könnyen megállapítható volt ez a pár forgatás, és könnyen vissza lehetett állítani a rendezett helyzetet. A Lights Out esetében is ugyanez a helyzet: két-három gombnyomás hatását még vissza lehet követni, azonban a további gombnyomások úgy megkeverik a fényeket, hogy valószínűleg azt már nem tudjuk megtenni.

A nagyobb kiosztásoknál a lehetséges megoldható kiindulási állapotok száma túlságosan nagy

ahhoz, hogy azok kézi megoldására mindegyikhez külön-külön szabályokat találjunk ki. Akár a Rubik-kocka esetében, a megoldáshoz csak kisebb lépésekben lehet eljutni.

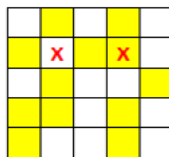
A megoldás mérettől és mintázattól függően történik, a követett taktika rendszerint a fények olyan elrendezésének a kialakítása, amit majd egyszerű szabályokkal kezelhetünk. Összesen 62 fajta változatra vizsgáltuk meg vagy dolgoztuk ki a kézi megoldás lehetséges módszereit. Ezek közül ebben a cikkben négy kiemelt esetet mutatunk be. E 62 változaton felül a játékosnak lehetősége nyílik arra, hogy téglalap alakú táblán is játsszon, valamint arra, hogy egy 3×3 -as mezőben a fények konfigurációját tetszőlegesen állítsa be: ezekben az esetekben a megoldás szabályainak a kidolgozása a játékosra marad.

6. A klasszikus eset kézi megoldása

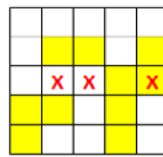
A kézi megoldás klasszikus menete a közismert „fénykövetés” (light chasing) módszere, amely során az első lépésben a fényeket leszorítjuk a legalso sorba. A második lépésben, az alsó sorban így kialakult mintázattól függően a felső sorban bizonyos gombokat megnyomunk, majd az így felgyújtott fényeket újból leszorítjuk az alsó sorba. Mindkét lépésben soronként dolgozunk, felülről lefele haladva.

Általánosítva az eljárást, az első lépésben elsőként a második sorban nyomunk gombokat, a felső sorban égő fények alatt. A **8. ábrán** látható példában tehát a második sorban a piros X-szel megjelölt második és negyedik gombot kell megnyomni. Ezen a szabályon lazíthatunk, mert pl. ha a felső sorban az első két fény ég, akkor a jobb felső sarokban levő gomb megnyomásával mindkét fényt leolthatjuk. Ugyanígy, ha a felső sorban egymás mellett három fény is ég, akkor ezek közül a középsőt megnyomva tudjuk mind a hármat leoltani.

Az első sorban levő fények kioltása után a második és a harmadik sor is átalakul (**9. ábra**). A következőkben a második sorban levő fényeket oltjuk ki



8. ábra. Egy kiindulási helyzet



9. ábra. A fények a második sorban történt gombnyomás után

úgy, hogy az alattuk levő gombokat nyomjuk meg. A második sorban levő gombokat nem nyomhatjuk meg, mert a felette levő, vagyis az első sorban levő, már leoltott fények állapotán is módosítanánk.

Így haladunk sorról sorra lefelé. Végül csak az ötödik sorban maradhatnak égő fények (10. ábra), de megtörténhet az is, hogy egy kis szerencsével már az első lépésben sikerül minden fényt kioltani.

Az 5 × 5-ös verzióban nincs minden fény-kombináció esetében megoldás, a megoldható kiinduló állapotokban az alsó sor fényeinek csak a 11. ábrán felsorolt elrendezéseivel találkozhatunk. A szimmetrikus ismétlődéseket leszámítva csak öt, azokkal együtt hét különböző ilyen állapot van. Ha az alsó sorban a fények más konfigurációja jelenik meg, akkor az adott játéknak nincs megoldása.

A fénykövetés második lépése az alsó sorhoz igazodik: a megoldáshoz, esetenként, a felső sorban a megjelölt gombokat kell megnyomni, aztán a fénykövető eljárással a második sortól ismét az alsó sor felé kell haladni: ha minden jól megy, akkor minden fényt le tudunk oltani. Az első sorban a megjelölteken kívül más gombot ne nyomjunk meg.

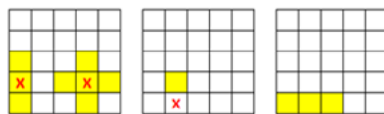
Ezeket a szabályokat úgy lehetett megállapítani, hogy egy olyan állapotból kiindulva, ahol egyetlen fény sem világít, a legfelső sorban megnyomunk egy gombot, majd megfigyeljük, hogy a fénykövetéssel a fények milyen elrendezése alakul ki az alsó sorban (12. ábra). Ilyenképpen a lehetséges hétből öt esetre már meg is lesz a megoldás. Viszont, ha az alsó sorban a két szélső fény világít, akkor a felső sorban egyetlen gomb megnyomásával nem juthatunk el a megoldáshoz. De ha megnyomjuk az elsőt (amely az alsó sorban átváltja a 2., 3. és 5. fényeket), majd a másodikat (amely az 1., 2., és 3. fényeket váltja át), akkor az alsó sorban a 2. és 3. fények a két egymást követő oda-vissza váltás miatt nem változnak meg, és csak az 1. és az 5., vagyis a két szélső gomb fényében történik változás. A hatodik eset megoldásához tehát a felső sorban az 1. és a 2. gombokat kell megnyomni. Hasonlóképpen jutunk a hetedik eset megoldásához is.

7. 6 × 6, lyukas négyzet, végtelenítve (□#∞)

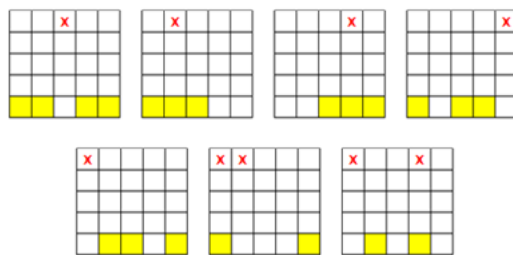
A lyukas négyzet a 6. ábrán az utolsó mintázat. Ez a változat az előbbtől (és a többi tanulmányozott esettől is) lényegesen különböző megoldási módot igényel, mivel a fénykövetés módszerével

a sorok végén a végtelenítés és a fények mintázata miatt akár két leolthatatlan fény is maradhat, minek következtében azokat nem lehet az alsó sorokba szorítani. Az első lépés után a két jobb oldali oszlopban meg a két alsó sorban fények különböző kombinációit figyelhetjük meg.

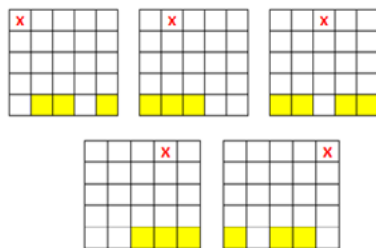
Ha megvizsgáljuk a megoldható állapotokat, akkor arra az eredményre jutunk, hogy a fények olyan párokban állnak, ahol a két világító gomb között egy sötét van. Egy ilyen párt a 13. ábrán is láthatunk, a kioltásához szükséges gombnyomá-



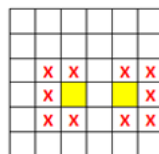
10. ábra. A fénykövetés első lépése során kialakult helyzet



11. ábra. Az alsó sorban kialakuló lehetséges megoldható állapotok, valamint a megoldásukhoz szükséges gombnyomások a felső sorban



12. ábra. Az alsó sorban levő fények kioltásához szükséges gombnyomások megállapítása



13. ábra. Egy fénypár és a leoltásához szükséges gombnyomások

sokkal együtt: viszonylag sok, 10 gomb megnyomása szükséges

A párok azonosítása körülményes lehet: ha három vagy több sorban is vannak fények, akkor azok függőleges irányban is megjelenhetnek. A **14. ábrán** a piros és a kék színű pár áll függőlegesen. Az első lépés végén kialakult állapotot elemi párokra bontva a fénykövetés második lépésében aránylag könnyen leolthatjuk a fényeket, beválalva az ismételt, fölösleges gombnyomások kockázatát. A példában az öt pár ötven gombnyomást igényelne. Ezen lehet egyszerűsíteni, az ismételt gombnyomások kiiktatásával. Ez fejben nehezen menne, de papíron előre megtervezve a megoldás már nem lesz annyira nehéz.

8. 5 × 5 lólépéssel

Ez az XL 25 egyik konfigurációja, amelyet a Lights Out későbbi verziói nem vettek át. Ennek az oka valószínűleg a megoldás nehézségeiben keresendő. Az egy gombnyomás által érintett fények helyzete eléggé komplikált ahhoz, hogy még az egy-két gombnyomással megoldható helyzetek felismerését is megnehezítse, mivel a gombnyomás hatása nagyobb területre, a megnyomott gombtól két sor vagy két oszlop távolságra is kiterjed. Emiatt amikor a fénykövetéssel a fényeket lefelé tereljük, azok az alsó két sorban égvé maradhatnak, s ráadásul egy sorban nem mindig kapcsolható le az összes fény. Mivel ez esetben bármilyen kiindulási állapot megoldható, a



14. ábra. Párookra bontás

fénykövetés első lépése után a fények igen nagy számú kombinációjához juthatunk, ami miatt a megjelenő mintázat alapján történő megoldási módszerek kidolgozása gyakorlatilag nem lenne célravezető. A járható út az első lépés után megmaradó fények egyenként történő leoltása, ami bonyolultabb sémakon alapuló hosszadalmas eljárást igényel.

A **15. ábrán** az egy fény kioltásához szükséges lépéseket látjuk. Ezeket sem lehet a klasszikus módon, próbálkozással meghatározni. A mellékelt ábrán a hat alapvető eset szerepel, a többiekhez ezeket a sémákat forgatni, tükrözni kell.

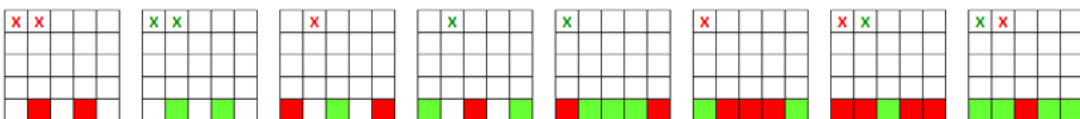
Mivel a fényeknek a klasszikus eljárás szerinti lefelé terelésének eredményeként azok közül elég sok maradhat égvé (legtöbb 13), és azok leoltásához egyenként legalább 9, de akár 16 gombnyomásra van szükség, jobban járunk, ha kezdeti lépésként egy kevésbé rendezett, de kevesebb felgyújtott fényből álló helyzetet próbálunk kialakítani. Ha pl. a szélső sorok és oszlopok világító gombjait megnyomjuk, akkor azok ki fognak aludni, és van esélyünk arra, hogy ezt ismételve a fények számát lecsökkentsük négyre vagy ötre. Ezeket aztán **15. ábrán** bemutatott hat eljárás megfelelő alkalmazásával tudjuk kioltani.

9. 5 × 5 háromállapotú fényekkel

A játék Lights Out 2000 verziójában jelent meg, ahol gombnyomásra a fények a kioltott állapotból (jelölje 0) először pirosra (1), aztán a második megnyomásra zöldre (2) váltanak, a harmadik gombnyomás pedig kioltja a fényt. Tehát ez egy ciklikus, de nem oda-vissza váltása a három állapotnak, ahol az állapotok a 0→1→2→0... sorrendben követik egymást. A köztes állapotban levő gomb fényének kioltásához két gombnyomásra van szükség. Egy gomb megnyomásának hatása



15. ábra. Egy adott fény leoltásához szükséges gombnyomások



16. ábra. Háromállapotú fények az első lépés végén

ez esetben is a klasszikusnak nevezhető + forma szerint terjed ki a szomszédaira.

A megoldás menete nem sokban különbözik a klasszikus verziótól: a fénykövetés első lépésében a fényeket leszorítjuk a legalsó sorba, ahol kioltott, piros és zöld fények egyaránt előfordulhatnak. Mivel a kiinduló állapotok között vannak olyanok, amiknek nincs megoldása, az alsó sorban e fények csak a 16. ábrán látható nyolc elrendezésben fordulhatnak elő. Felismerhetjük, hogy ezek egyszínű párokból állnak, azok egymásra tevődésével: $p + p = z$, $z + z = p$, $p + z = 0$.

A fénykövetés második lépésében ebből a nyolc helyzetből kiindulva kell leoltani az összes fényt. Ha a felső sorban tett gombnyomások hatásának követési módszerét alkalmazzuk, akkor az ábrán látható megoldási szabályokhoz jutunk. Az ábrákon a piros X egyszéri, a zöld pedig dupla gombnyomást jelent.

10. A matematikai megoldás

A számításokhoz három dologra van szükségünk. Ezek közül az első a $[K]_{m \times m}$ kapcsolatmátrix, amelynek annyi sora és oszlopa van, ahány gomb van a tanulmányozott kiosztásban (m a sorok száma, $\times$ az oszlopok száma). E mátrix sorai egy-egy fényhez vannak rendelve, egy sor pedig azokat a gombokat adja meg, amelyek az illető fény állapotában változást idéznek elő. A kapcsolatmátrix tehát egy 0 és 1 számokat tartalmazó négyzetes mátrix. A tanulmányozott esetekben, a háromszög kivételével, gombnyomások hatása irányonként azonos, mondhatnánk, hogy izotróp, a felgyújtott fények elhelyezkedése vízszintesen is, és függőlegesen is szimmetrikus. Emiatt a kapcsolatmátrix szimmetrikus lesz, ami azt jelenti, hogy ha az i gomb módosítja a j gomb állapotát, akkor a j gomb módosítani fogja az i gombét.

Ha ezt a szimmetriát megbontjuk, amire a példa a fények háromszög alakú elrendezése (a 17. ábra jobb oldalán), akkor a kapcsolatmátrix szimmetriája is meg fog szűnni.

A második dolog, amelyre a matematikai úton történő megoldáshoz szükségünk van, az a fények státusát tároló $\{A\}_m$ állapotvektor. Az állapotvek-

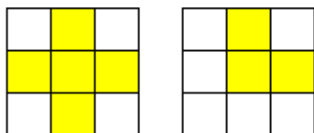
tor egy eleme egy fény kioltásához szükséges lépések számát tartalmazza. Ha a gomb állapota x , a fények állapotainak a száma nA , akkor a vektor megfelelő eleme $nA - x$, feltéve, hogy az illető fény nincs leoltva (ha igen, akkor 0 marad).

A harmadik szükséges dolog szintén egy vektor, $\{G\}_m$, amely a fények kioltásához megnyomandó gombokat adja meg (azt, hogy a megoldáshoz a gombokat hányszor kell megnyomni).

A felsorolt három mennyiséget a $[K] \cdot \{G\} = \{A\}$ lineáris egyenletrendszer köti össze. Ennek a fizikai jelentése a következő: ha a kapcsolatmátrix i sorát megszorozzuk a gombnyomások vektorával, akkor egy $K_{ij} \cdot G_j$ szorzat azt adja, hogy a j fény állapota hány lépésben változik meg. Az sor és a vektor szorzata a $K_{ij} \cdot G_j$ mennyiségek összegeként a j fény állapotában történő változást adja, a gombok megnyomása után. Az egyenletrendszer megoldásával az ismert kiinduló állapot függvényében próbáljuk a megnyomandó gombokat megtalálni. Ismerős felállásnak tűnik, azonban van ennek egy sajátossága is: mindhárom tag csak 0 és $nA - 1$ közötti egész számokból állhat. A számításokat tehát a számok $\{0, 1, \dots, nA - 1\}$ halmazán kell elvégezni.

Kétállapotú fények esetében a GF(2) kételemű Galois-testről van szó, ahol az aritmetika modulo 2 szerint történik. GF(2)-ben minden számnak megvan az additív és a multiplikatív inverze, tehát az egyenletrendszernek a Gauss–Jordan-eljárással történő megoldása során nem ütközhetünk aritmetikai jellegű problémákba. Ami fontos a Lights Out szempontjából: ha egy számhoz 1-et hozzáadunk, a halmaz következő elemét kapjuk. Ha az utolsó elemhez adunk hozzá 1-et, az visszavisz a halmaz elejére (az eredmény 0 lesz).

Ugyanez a helyzet a háromállapotú fények esetében is: a megoldást a GF(3) Galois-test felett keressük. Ebből extrapolálhatnánk, hogy a megoldás általánosítását a GF(nA) test fölött kell megfogalmazni, azonban már a négyállapotú fények esetében is kiderül, hogy ez nem így van. GF(4) ugyan létezik, de a halmaz tagjai nem egész, számok, hanem $\{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}$, ahol α és $\alpha + 1$ az $x^2 + x + 1$ polinom gyökei (ezek nem számok, hanem formális elemek). Első meglátásra kézenfekvőnek tűnik α -t egyszerűen a harmadik elemként „2”-nek tekinteni, $\alpha + 1$ -et pedig „3”-nak, azonban GF(4)-ben $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 0$, „2” + 1 = „3”, „3” + 1 = „2”, vagyis nem adja az állapotok ciklikus változását. Ugyanez a helyzet minden más olyan esetben, amikor nA valamelyik prímszám hatványa. Ebből leszűrhetjük azt a következtetést, hogy a Lights Out megoldásához nem a Galois-test felet-



17. ábra. A fények szimmetrikus és nem szimmetrikus elrendezése

ti számolás a fontos, hanem az, hogy a számítások modulo nA -ban történjenek. Ennek van egy hátránya is, mert modulo nA -ban, ha nA nem prím, nincs minden számnak multiplikatív inverze. A négyállapotú fények esetében $3^{-1}=1$, viszont 2^{-1} nem létezik. Emiatt a Gauss–Jordan-eljárásban, ha a főátlóra 2-es kerül, nem tudjuk elvégezni a normalizálást, és ha így próbálunk visszahelyettesíteni, az további sorokat is „elronthat” (megtörténhet, hogy egy már normalizált sort 2-vel kell megszorozni a redukáláshoz, ami a főátlón levő 1-est 2-esre fogja állítani).

A további esetek tanulmányozásakor figyelembe kell venni azt a tényt, hogy ha nA nem prím vagy prímhatvány, akkor nem lehet vele Galois-testet alkotni. Ekképpen $nA=6$ -ra is valamilyen más módszert kell kitalálni. Megpróbálhatnánk modulo 6-ban számolni, azonban ennek az a hátulütője, hogy a 2, 3 és 4 számoknak nincs multiplikatív inverzük, úgyhogy a négyállapotú fényeknél is bonyolultabb helyzetbe keveredünk. Van azonban egy kínai maradéktétel (Chinese Remainder Theorem, CRT), amely páronként relatív prímekre alkalmazható (mivel $6=2\cdot 3$ és 2 és 3 lanko-ja 1, az esetünk ennek éppen megfelel). E tétel szerint, ha $x \bmod m_1=a_1$, $x \bmod m_2=a_2$, és így tovább, ahol m_1, m_2 stb. relatív prímek, akkor $x=a_1\cdot M_1\cdot y_1+a_2\cdot M_2\cdot y_2+\dots$, ahol $M_i=M/m_i$, $M=m_1\cdot m_2\cdot\dots$, $M_i\cdot y_i=1$, modulo m_i -ben. E tétel alkalmazásához az egyenletrendszert kétszer oldjuk meg, modulo 2-ben és modulo 3-ban. A két megoldást jelölje $\{G_2\}$ és $\{G_3\}$. A megoldást ezek $\{G_6\}=3\cdot\{G_2\}+4\cdot\{G_3\}$ kombinációja adja.

Általánosíthatjuk a tapasztalatokat:

- ha nA prím, akkor modulo nA -ban számolunk, ami egyenértékű a $GF(nA)$ -val;
- ha nA prímhatvány, akkor szintén modulo nA -ban számolunk, de a $GF(nA)$ nem alkalmazható: ennek következményeként a Gauss–Jordan-eljárást megfelelőképpen módosítanunk kell;
- ha nA összetett szám, akkor azt relatív prímekre kell bontanunk. Az összetevőkkel az előző két pont szerint külön-külön megoldjuk az egyenletrendszert, a megoldásokat pedig a kínai maradéktétellel kombináljuk.

Ezek alapján a tanulmányozott esetek közül a 2, 3 és 5 állapot egyszerűen kezelhető, $4=2^2$ prímhatványként modulo 4-ben külön kezelendő helyzetekhez vezethet, $6=2\cdot 3$ a kínai maradéktétel alkalmazásával kétszeri megoldást és az eredmények kombinálását igényli. Ha tovább folytatnánk a sort, akkor 7 prímszám, 8 és 9 prímhatvány, $10=2\cdot 5$ (két prímszám szorzata), 11 prím, $12=3\cdot 4$ (relatív prímek szorzata) és így tovább.

Az egyenletrendszer megoldása a Gauss–Jordan-eljárással történik. Fentről lefelé haladva, a főátlón levő tagot normalizálni próbáljuk. Ha a főátlón nulla vagy egy nem invertálható szám van (ez utóbbi a négyállapotú fények esetében történhet meg, amikor ez a szám 2), akkor először a sorok cserélésével próbálunk a helyére egy 1-est, vagy ha az nincs, akkor egy invertálható számot odaköltöztetni. Amikor a sorok cseréjével ez nem oldható meg, akkor teljes pivotálást hajtunk végre (oszlopokat is cserélünk), miközben megjegyezzük a változók új sorrendjét.

Ha elfogytak az 1-esek és az invertálható számok, akkor a főátlóra egy nem nulla számot kell költöztetni.

Amikor nincs minden kiindulási helyzetnek megoldása, az utolsó sorokban csak nullások szerepelnek (a főátlón is). Ha egy ilyen sorban a szabadtag nem nulla, akkor a kiindulási helyzet megoldhatatlan.

A 18. ábrán az ekképpen redukált egyenletrendszer kiterjesztett mátrixát látjuk, négyállapotú fények esetére. Megfigyelhetjük, hogy az első 8 sorban a főátlóra 1-es került, amivel már elvégeztük a redukálást és a visszahelyettesítést is (az első 8 oszlopban a főátlón kívül csak nullások vannak).

A következő két sorban a főátlón 2-es van, tehát ezeket a sorokat nem lehet normalizálni, így nem lehetett redukálni és visszahelyettesíteni sem. E két sort próbálkozással oldjuk meg, megkevesvén az első lehetséges megoldást. Az első 8 változót nulla értékükkel vesszük. A megmaradó nyolccal végigpróbáljuk az összes lehetséges

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3	0	2	3	2	3	2
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	3	0	3
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3	3	2	3	2
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3	0	3	3	0	2	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	3	0	3	2	0	3	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	2	0	2
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	2	0	2
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

18. ábra. Az egyenletrendszer kiterjesztett mátrixának részben redukált formája

kombinációt, amelyekből jelen esetben $4^8 = 65536$ van. Ez elég soknak tűnik, azonban számítógépes eljárással gyorsan megkerül a keresett megoldás. Először az első sorra kerülünk egy lehetséges megoldást, majd ha az megvan, akkor ellenőrizzük, hogy a második sor esetében is megoldás-e. Ha nem, tovább folytatjuk a keresést. Az ábrán látható esetben egy lehetséges megoldás pl. az a vektor, amelynek a tizedik eleme 1, az összes többi 0. Ha megvan a megoldás, akkor a 9. sorban a szabadtagot 0-ra, a 10.-ben pedig 1-re állítjuk, a főátlón levő 2-esek helyére 1-eseket írunk, és a sorok többi elemét lenullázzuk. E két sor felett és alatt a kapott megoldást visszahelyettesítjük: pl. a próbálkozással kiszámított megoldáshoz tartozó x -edik sor szabad tagjával, b_x -szel megszorozzuk az i -edik sorban levő K_{ix} tagot, majd ezt a szorzatot átvisszszük az egyenlet jobb oldalára: annak a szabad tagjának új értéke $b_i - b_x \cdot K_{ix}$ lesz.

A 18. ábrán a hat alsó sor csupa nullást tartalmaz (a szabad tagok is azok): a megoldásvektornak az e sorokhoz tartozó tagjait nullának vehetjük.

Ekképpen az egyenletrendszer s ezzel a kiindulási állapot egy lehetséges megoldásához jutunk.

11. Az optimális megoldás

Az optimális megoldás a legkevesebb gomb megnyomását igényli. Ezt segédeszközök nélkül még az egyszerűbb esetekben is elég nehéz megtalálni, a bonyolultakban meg egyszerűen lehetetlen, ezt csak matematikai úton lehet elérni.

A dolgok matematikai háttere az aluldeterminált lineáris egyenletrendszer megoldásához kötődik. Ebben több ismeretlen szerepel, mint ahány egymástól független egyenletünk van. A Gauss–Jordan-eliminációval ennek az egyenletrendszernek egy lehetséges $\{G_p\}$ partikuláris megoldását kaptuk, amelyben minden szabadon megválasztható változó értéke nulla volt. Az aluldetermináltság miatt több megoldás is lehetséges. Ezeket a $[K] \cdot \{G\} = \{0\}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásával lehet felírni. Ha ez utóbbinak egy megoldása van $\{G_h\}$, akkor $\{G_p\} + \{G_h\}$ a lineáris egyenletrendszer egy általános megoldása lesz. Mi több, azok $\{G_p\} + \sum c_i \cdot \{G_h\}_i$ lineáris kombinációja is az lesz. A homogén egyenletrendszer megoldásainak halmazát nulltérnek nevezzük.

Ha a változók végtelen halmazon lennének értelmezve, mint például az egész számok halmaza, a nulltérnek végtelen sok eleme lenne (feltételezve a lineáris egyenletrendszer megoldhatóságát). A mi esetünkben viszont a változók csak

0-tól $nA-1$ -ig terjedő egész értéket vehetnek fel, így a nulltér csak néhány elemet tartalmaz: ha az egyenletrendszer redukált mátrixában n csupa nulla sort találtunk, akkor a szabadon választható ismeretlenek lehetséges elrendezéseinek száma nA^n .

Ha ez a szám nem túl nagy, akkor az optimális megoldást a teljes nulltéren való kereséssel végezhetjük el. Ehhez bázisvektorokat generálunk. Egy bázisvektornak minden tagja nulla, kivéve a nulltér egyik sorához tartozót, amely 1 és $nA-1$ között van. A bázisvektorok lehetséges kombinációival megoldjuk a homogén egyenletrendszert (csak visszahelyettesíteni kell a már redukált formában), minden egyes kombináció esetén megszámláljuk a megoldásvektorban levő gombnyomások számát. Az optimális megoldás az (vagy azok), ahol e számnak minimuma van.

Ha ez a szám túlságosan nagy, akkor a teljes nulltéren való keresés igen költséges lenne. Egyes végtelenített, 6×6 -os kiosztásokban a nulla sorok száma 20 volt. Ezekben az esetekben, hatállapotú fényekre a lehetséges megoldások száma 6^{20} lenne, ami egy nagyon nagy szám. Ilyen esetben csak egy próba-szerencse alapú eljárást lehet alkalmazni: mi egy 10 lépésben történő Greedy-keresést alkalmaztunk, ami a legtöbb esetben valóban az optimális vagy ahhoz közel álló megoldáshoz vezetett. Az alkalmazott algoritmus egyenként próbálja végig a bázisvektorokat, és ha az eredmény javul, akkor azt beépíti a megoldásba. Mivel ez új állapotot teremt, a keresést még kilencszer elindítjuk, a már beépített bázisvektorok kiiktatásával. A tizedik lépés végén nyert megoldást tekintjük az elérhető legjobbnak.

12. Az optimális megoldás kézi eljárással

Az előbbi fejezetben leírtak alapján nyilvánvalóvá válik, hogy az optimális megoldás kézi keresése az elvégzendő műveletek nagy száma miatt alighanem lehetetlen. Ha mégis minden áron magunknak akarjuk tudni azt a dicsőséget, hogy emberi megoldással jutottunk el az optimális megoldásig, akkor megnyugodva könyvelhetjük el, hogy az egyszerűbb esetekben mégiscsak van egy módszer annak megkereséséhez. Ez akkor lehetséges, amikor a nulltérnek csak kevés eleme van. A megoldás a gombnyomások nulla hatású mintázatát használja, amelyek a homogén egyenletrendszer lehetséges, nem triviális megoldásai. Ezeket számítógéppel lehet előzetesen meghatározni. Másképpen: a munka nehezét továbbra is a számítógép végzi el, a kézi számítások pedig az így kapott

rűbb részfeladatokra bontja a megoldás menetét, ami a nem invertálható sorok számának csökkenéséhez vezet. Hatállapotú fények esetében az egyenletrendszert kétszer kell megoldani, modulo 2-ben és modulo 3-ban, az eredmény pedig a két részeredmény kombinációjaként írható fel. Ekképpen, ebben az esetben a nem invertálható sorok problémája eltűnik.

Gyakran a játék optimális megoldását keresik: ez azokban a kiosztásoknál vetődik fel, amikor nincs minden lehetséges kezdeti állapotnak megoldása, ami azt is jelenti, hogy a megoldandó lineáris egyenletrendszer aluldeterminált. Ekkor az egyenletrendszernek, tehát a játéknak több megoldása is lehetséges, a feladat pedig ezek közül kiválasztani azt, amelyik a legkevesebb gombnyomásból áll. Amennyiben a nulla sorok száma kicsi, az optimális megoldást a teljes megoldáshalmazon történő kereséssel kapjuk, ellentétes esetben viszont valamilyen heurisztikus, próbálkozásalapú kereső algoritmussal (pl. Greedy) juthatunk el egy jobb megoldáshoz (amely nem lesz garantáltan optimális).

Szakirodalmi hivatkozások

Kimondottan a Lights Out történetével foglalkozó publikációkat nem lehet fellelni. Jaap Scherp-huis a forgatható kirakósok (Rubik-kocka és ro-

kon mechanikus logikai játékok) egyik legismertebb nemzetközi szakértője, gyűjtője és dokumentátora. A neve elsősorban a Jaap's Puzzle Page (jaapsch.net) oldal kapcsán ismert, amely a világ egyik legnagyobb, legpontosabb és legátfogóbb online adatbázisa a mechanikus és elektronikus logikai játékokról. Ezen az oldalon találhatunk egy rövid összefoglalót a Lights Out megjelenéséről, fejlődéséről és előzményeiről.

A magyar vonatkozásban is érdekes XL 25-ről legfennebb blogokban olvashatunk.

A Lights Out megoldásának matematikai háttere alapjairól a következő művekben olvashatunk:

- [1] Marlow Anderson, Todd Feil: *Turning Lights Out with Linear Algebra*. Mathematics Magazine, 71/4. (1998) 300–303.
https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/classes/imps_2017/11_28/2690705.pdf
- [2] Robert Cowen, John Kennedy: *The Lights Out Puzzle*. Mathematica in Education and Research. 9. (2000) 28–32.
- [3] Rudolf Fleischer, Jiajin Yu: *A Survey of the Game "Lights Out!"*. In: Brodnik, A., López-Ortiz, A., Raman, V., Viola, A. (eds) *Space-Efficient Data Structures, Streams, and Algorithms*. Lecture Notes in Computer Science, 8066. Springer, Berlin, Heidelberg.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-40273-9_13